Michael Schreier
Ferienkurs Lineare Algebra für Physiker
Aufgaben Montag
WS 2008/09

Aufgabe 1 *Komplexe Zahlen*

a) Berechnen Sie folgende komplexe Zahlen in einer **beliebigen** Darstellung

$$\frac{2+i}{3+4i}, \quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4, \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}$$

b) Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichungen

$$\frac{z^5+3z^4-z-3}{z+3}=0, \quad \frac{z^4-3z^3+3z^2-3z+2}{z^2-3z+2}=0, \quad z^3+z^2+4z+4=0$$

c) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- Es gibt $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 < z_2$
- Es gibt $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1| < |z_2|$
- Ist $z \in \mathbb{C}$ Lösung eines Polynoms, so ist auch $\overline{z}$ Lösung dieses Polynoms
- $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$ Wie lautet gegebenenfalls die richtige Darstellung?
- $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2}$ Wie lautet gegebenenfalls die richtige Darstellung?

Aufgabe 2 *Skalarprodukte*

a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, dann wird durch $S : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto S(x,y) := x^T \cdot A \cdot y \end{cases}$ eine Bilinearform definiert. Für welche Matrizen A ist S ein Skalarprodukt?

b) Entscheiden Sie, ob die angegebenen Abbildungen
☐ bilinear, ☐ positiv definit, ☐ symmetrisch oder gar ☐ Skalaprodukte sind.

☐☐☐☐ $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := x_1x_2 + y_1y_2$

☐☐☐☐ $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := (x_1+x_2)\cdot(y_1+y_2)$

☐☐☐☐ $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

☐☐☐☐ $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := x^2 \cdot y^2$

☐☐☐☐ $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ mit $f(A,B) := (1,1)A \cdot B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1,1)B \cdot A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Seien A, B, C und D die Ecken eines nicht notwendigerweise ebenen Vierecks mit den Seitenlängen $b := \overline{AB}$, $c := \overline{BC}$, $d := \overline{CD}$, und $a := \overline{DA}$.
Zeigen sie durch Verwendung von (Orts-)Vektoren und Eigenschaften eines Skalaprodukts s des $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, dass für die Diagonalen gilt: $AC \perp BD \Leftrightarrow a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

d) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ($\dim(V) > 1$) und die Abbildung $f : V \to \mathbb{C}$ ($\neq$Nullabbildung). Sind die folgenden Abbildungen
☐ Sesquilinearformen, ☐ hermitesch, ☐ positiv definit und/oder ☐ Skalarprodukte auf V?

☐☐☐☐ $g : V \times V \to \mathbb{C}$ mit $(x,y) \mapsto g(x,y) := \overline{f(x)} + f(y)$

☐☐☐☐ $h : V \times V \to \mathbb{C}$ mit $(x,y) \mapsto g(x,y) := \overline{f(x)} \cdot f(y)$

e) Gegeben seien die Abbildung $s : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^3$ mit $s(x,y) = \overline{x^T} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} y$ sowie $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$

- Zeigen Sie: s ist ein Skalaprodukt
- Berechnen Sie den Abstand und den Winkel von a und b bezüglich s
- Bestimmen Sie sämtliche Vektoren $v \in \mathbb{C}^3$ welche auf a und b bezüglich s senkrecht stehen

Aufgabe 3 *Normen*

Prüfen Sie die Normeigenschaften einer konkreten p- und der Maximumsnorm

Aufgabe 4 *Vektorräume*

a) Welche der folgenden Aussagen gelten in einem Vektorraum V über einem Körper K?

☐ $(V\backslash\{0\}, \cdot)$ ist kommutative Gruppe
☐ $(K, \cdot)$ ist kommutative Gruppe
☐ $\forall \lambda, \mu \in K,\ \forall v \in V$ gilt $(\lambda\mu)v = \mu(\lambda v)$
☐ $\forall \lambda, \mu \in K,\ \forall v \in V$ gilt $\lambda(v + \mu) = \lambda v + \lambda\mu$
☐ $\forall \lambda \in K,\ \forall v, w \in V$ gilt $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
☐ $\forall \lambda \in K,\ \forall v \in V$ gilt $\lambda v = v\lambda$
☐ $\forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in V$ gilt $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
☐ $\forall v \in V$ gilt $(-1)v = -v$

b) Untersuchen Sie für folgende Mengen ob sie Teilräume der angegebenen Vektorräume über $\mathbb{R}$ sind

- $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$
- $\{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$
- $\{f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\} \subset Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq x_2\} \subset \mathbb{R}^3$

Aufgabe 5 *lineare Unabhängigkeit und Basen*

a) Zeigen Sie, dass $b_1 = (1,0,1),\ b_2 = (1,0,2),\ b_3 = (0,1,1)$ eine Basis des $\mathbb{R}-$Vektorraums $\mathbb{R}^3$ ist

b) Gegeben sei folgende Menge M von 6 Vektoren $v_1, \ldots, v_6 \in \mathbb{R}^4$

$$M = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Zeigen Sie dass sich jeder Vektor $v_i \in M$ als Linearkombination der anderen Vektoren aus $M\backslash\{v_i\}$ schreiben lässt
- Welche der folgen Aussagen sind wahr?
  ☐ span(v_2, v_3, v_5) =span(v_3, v_5)
  ☐ span(v_2, v_3, v_5) =span(v_1, v_3, v_5)
  ☐ span(v_1, v_5, v_6) =span$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$
  ☐ span(v_1, v_2, v_4) =span(v_2, v_3, v_5, v_6)
- Geben Sie eine Basis des von M aufgespannten Untervektorraums des $\mathbb{R}^4$ an.

Aufgabe 6 *Gram-Schmidt-Verfahren*

a) Im $\mathbb{R}^4$ seien die Vektoren $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ bezogen auf eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ gegeben

- Bestimmen Sie für $\operatorname{span}(a_1, a_2, a_3)$ nach Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis $\{b_1, b_2, b_3\}$
- Ergänzen die Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ von $\operatorname{span}(a_1, a_2, a_3)$ zu einer Orthonormalbasis $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ des $\mathbb{R}^4$

b) Bestimmen Sie für $U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ i \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{C}^4$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts eine Orthonormalbasis nach Gram-Schmidt und ergänzen Sie diese zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^4$

Aufgabe 7 *orthogonale Projektion*

Es sei U ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ mit dem kanonoischen euklidischen Skalarprodukt. Berechnen Sie den minimalen Abstand des Punktes $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zu der Ebene

$$U = \left(b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$