MICHAEL SCHREIER
VORLESUNG MONTAG

FERIENKURS LINEARE ALGEBRA FÜR PHYSIKER
WS 2008/09

1 komplexe Zahlen

Viele Probleme in der Mathematik oder Physik lassen sich nicht oder nur über Umwege beziehungsweise deutlich schwerer mit den bekannten reellen Zahlen $\mathbb{R}$ lösen. In solchen Fällen ist es notwendig auf die *komplexen Zahlen* zurückzugreifen. Diese ermöglichen es oft auf elegante Weise zum Ergebnis zu gelangen.

Definition 1.1 *Die imaginäre Einheit*

Die Zahl i wird als *imaginäre Einheit* bezeichnet. Dabei gilt:

$$i^2 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{-a} = i\sqrt{a},\ a \in \mathbb{R}^+$$

Definition 1.2 *kartesische Form*

Sei $z \in \mathbb{C}$, dann ist $z = a + i \cdot b,\ a, b \in \mathbb{R}$ die kartesische Darstellung von z. Dabei wird a als *Realteil* und b als *Imaginärteil* bezeichnet. Es gilt also $\mathrm{Re}\ z = a,\ \mathrm{Im}\ z = b$.

Rechenregeln
Seien $u = a + ib,\ v = c + id\ \in \mathbb{C}$, dann gilt:

$$u \pm v = (a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

$$u \cdot v = (a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$\frac{u}{v} = \frac{a + ib}{c + id}$$

Definition 1.3 *Polarform*

Sei $z \in \mathbb{C}$, dann ist $z = r \cdot e^{i\varphi},\ r, \varphi \in \mathbb{R}$ die Polardarstellung von z.

Rechenregeln
Seien $z = r_1e^{i\varphi}, v = r_2e^{i\psi}\ \in \mathbb{C}$, dann gilt:

$$z \cdot v = r_1e^{i\varphi} \cdot r_2e^{i\psi} = r_1r_2e^{i(\varphi+\psi)}$$

$$z^n = (r_1e^{i\varphi})^n = r_1^ne^{i\varphi n}$$

$$\frac{z}{v} = \frac{r_1e^{i\varphi}}{r_2e^{i\psi}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i\varphi} \cdot e^{-i\psi} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi-\psi)}$$

Satz 1.4 *Umrechnung*

Die Umrechnung der Polar- in die kartesische Form gestaltet sich recht einfach, denn es gilt allgemein

$$e^{\pm i\varphi} = \cos(\varphi) \pm i\sin(\varphi)$$

Damit folgt für die Umrechnung

$$z = r \cdot e^{\pm i\varphi} = r\cos(\varphi) \pm i \cdot r\sin(\varphi)$$

Für die entgegengesetzte Richtung gilt:

$$z = a + ib,\ r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \varphi = \arctan\frac{b}{a} = \arg z$$

Definition 1.5 *komplexe Konjugation*

Sei $z = \text{Re } z + i \cdot \text{Im } z$, dann bezeichnet

$$\bar{z} = \overline{\text{Re } z + i \cdot \text{Im } z} = \text{Re } z - i \cdot \text{Im } z$$

das *komplex konjugierte* zu z.
In der Polardarstellung gilt hierbei

$$z = re^{i\varphi},\ \bar{z} = re^{-i\varphi}$$

Korollar 1.6 *Betrag einer komplexen Zahl*

Der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl ist definiert als

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2}$$

Damit lässt sich die Division zweier komplexer Zahlen in kartesischer Darstellung eleganter ausdrücken

$$\frac{u}{v} = \frac{u\overline{v}}{v\overline{v}} = \frac{1}{\underbrace{v\overline{v}}_{\in\mathbb{R}}} \cdot \underbrace{u\overline{v}}_{\in\mathbb{C}}$$

Satz 1.7 *Dreiecksungleichung*

Seien z_1 und z_2 komplexe Zahlen, dann gilt

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Der Satz lässt sich auch auf Punkte im $\mathbb{R}^n$ anwenden (siehe Norm).

Zusatz 1.8 *komplexe Einheitswurzeln*

$$1 - z^n = 0 \Leftrightarrow z = e^{2\pi i \frac{m}{n}},\ m \in [0, n-1]$$
$$1 + z^n = 0 \Leftrightarrow z = e^{2\pi i \frac{m}{n} + i\frac{\pi}{n}}$$

2 Gruppen, Körper und Vektorräume

2.1 Gruppen

Definition 2.1 *Gruppenaxiome*

Eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ$ heißt Gruppe wenn

(i) $a, b \in G: \ a \circ b = c, \ c \in G$ (Abgeschlossenheit)

(ii) $\exists e \in G \mid e \circ g = g \ \forall g \in G$ (neutrales Element)

(iii) $\forall g \in G \ \exists g' \in G \mid g' \circ g = e$ ((links-)Inverses)

(iv) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \ \forall a, b, c \in G$ (Assoziativität)

(i) wird oft auch schon bei der Definition der Verknüpfung vorausgesetzt

2.2 Körper

Definition 2.2 *Körperaxiome*

Eine Menge $\mathbb{K}$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt Körper wenn

(i) $(\mathbb{K}, +)$ ist kommutative (abelsche) Gruppe

(ii) $(\mathbb{K} \backslash \{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe

(iii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \ \forall a, b, c \in \mathbb{K}$ (Distributivgesetz)

2.3 Vektorräume

Definition 2.3 *Vektorraumaxiome*

Die Mengen $\mathbb{K}$(„Zahlen") und V(„Vektoren") mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißen ($\mathbb{K}$-)Vektorraum falls

(i) $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ist Körper

(ii) $(V, +)$ ist abelsche Gruppe

(iii) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \ v \in V$

(iv) $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ v, w \in V$

(v) $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v) \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \ v \in V$

(vi) $1 \cdot v = v \ \forall v \in V$

Streng genommen muss man zwischen $\cdot$ und $\cdot'$ bzw. $+$ und $+'$ für die verschiedenen Verknüpfungen zwischen Vektoren und Skalaren unterscheiden.

Definition 2.4 *Untervektorräume*

Sei $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum wenn

(i) $U \neq \{\}$

(ii) $v + w \in U \ \forall v, w \in U$

(iii) $\lambda \cdot v \in U \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall v, w \in U$

Satz 2.5

Jeder Untervektorraum ist ein Vektorraum

3 Skalarprodukt und Norm

3.1 Skalarprodukte

Das auch *inneres Produkt* genannte Skalarprodukt stellt eine Möglichkeit dar die bekannte Multiplikation von Zahlen auf Vektoren zu erweitern.

Definition 3.1 *Skalarprodukt über* $\mathbb{R}$

Eine Abbildung $s(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt falls

(i) $s(v,w) = s(w,v),\ \forall^1 v,w \in V$ (Symmetrie)

(ii) $s(\lambda v,w) = \lambda s(v,w), \lambda \in \mathbb{R}$
$s(v_1+v_2,w) = s(v_1,w) + s(v_2,w)$ (Biliniearität)

(iii) $s(v,v) \geq 0,\ \forall v \in V$
$s(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (positiv definit)

Definition 3.2 *Das kanonische Skalarprodukt über* $\mathbb{R}$

Das kanonische Skalarprodukt über $\mathbb{R}$ ist dabei definiert als

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \underline{v}^T \cdot \underline{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

Definition 3.3 *Skalarprodukte über* $\mathbb{C}$

Eine Abbildung $s(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt Skalarprodukt falls

(i) $s(v,w) = \overline{s(w,v)},\ \forall v,w \in V$ (hermitesch)

(ii) $s(v,\lambda w) = \lambda s(v,w), \lambda \in \mathbb{C}$
$s(w,v_1+v_2) = s(w,v_1) + s(w,v_2)$ (Linearität im 2. Argument)

(iii) $s(v,v) \geq 0,\ \forall v \in V$
$s(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (positiv definit)

Anmerkung: Je nach Definition kann die Linearität auch für das 1. Argument postuliert werden

Zusatz 3.4 *Sesquilinearform*

(i) und (ii) implizieren eine Sesquilininearform, das heißt

$$s(v,\lambda w) = \lambda s(v,w) \text{ und } s(\lambda v,w) = \overline{\lambda} s(v,w)$$

Definition 3.5 *das kanonische Skalarprodukt über* $\mathbb{C}$

Das kanonische Skalarprodukt über $\mathbb{C}$ ist dabei definiert als

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \overline{\underline{v}^T} \cdot \underline{w} = \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i} w_i$$

Es wird deutlich das sich die kanonischen Skalarprodukte über $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$ nicht unterscheiden. Lässt man nämlich in der Definition des Skalaprodukts über $\mathbb{C}$ nur reelle Zahlen/Vektoren zu so erhält man genau das Skalarprodukt über $\mathbb{R}$.

Neben dem kanonischen Skalarprodukt gibt es quasi beliebig viele Möglichkeiten weitere Skalarprodukte zu definieren. Diese lassen sich in der Regel über eine Matrix-Vektor-Multiplikation darstellen.

[1] Quantoren: $\forall$=“für alle“, $\exists$=“existiert“, : oder | =“mit der Eigenschaft“

Satz 3.6 *Das allgemeine Skalarprodukt*

Das Allgemeine Skalarprodukt lässt sich in der Form

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \overline{\underline{v}^T} \underline{A}\ \underline{w},\ \ \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{K}^n,\ \ \underline{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

schreiben. Dabei gilt für $\underline{A}$

- $\underline{A}$=hermitesch $(\underline{A}^T = \overline{\underline{A}})$
- $\underline{A}$=positiv definit ($\forall$EW[1] λ_i von $\underline{A}$ gilt: $\lambda_i > 0$)

Definition 3.7 *Orthogonalität*

Zwei Vektoren $\underline{v}, \underline{w}$ sind zueinander orthogonal **bezüglich** eines Skalarprodukts $s(\cdot, \cdot)$, falls gilt

$$s(\underline{v}, \underline{w}) = 0$$

Gilt zusätzlich $s(\underline{v}, \underline{v}) = s(\underline{w}, \underline{w}) = 1$ so nennt man die Vektoren *orthonormal*

3.2 Normen

Eng verwandt mit dem Skalarprodukt ist die Norm. In der Regel wird sie für die Länge eines Vektors verwendet, es gibt aber eine ganze Klasse von Normen.

Definition 3.8 *Norm*

Eine Abbildung $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}_0^+$ bezeichnet man als Norm falls

(i) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0,\ \ v \in V$

(ii) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|,\ \ \lambda \in \mathbb{K}$

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|,\ \ v, w \in V$

gebräuchliche Normen

- **Jedes** Skalarprodukt $s(\cdot, \cdot)$ definiert über $\sqrt{s(\cdot, \cdot)}$ eine Norm. Sie wird auch Länge bezüglich $s(\cdot, \cdot)$ bezeichent
- p-Norm: $\|\underline{v}\|_p := (v_1^p + \cdots + v_n^p)^{\frac{1}{p}}$
- Maximumsnorm: $\|\underline{v}\|_{max} := \max_i |v_i|$

Satz 3.9 *Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

Sei $s(\cdot, \cdot)$ ein Skalarprodukt und $\| \cdot \|_s$ die zugehörige Norm, dann gilt

$$|s(\underline{v}, \underline{w})| \leq \|\underline{v}\|_s \cdot \|\underline{w}\|_s$$

Als Folge aus der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung lässt sich der Winkel zwischen zwei Vektoren $\underline{v}$ und $\underline{w}$ über ein Skalarprodukt und dessen zugehörige Norm berechnen.

Satz 3.10 *Winkel und Normen*

Sei $s(\cdot, \cdot)$ ein Skalaprodukt und $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$

$$\cos \alpha = \frac{s(\underline{v}, \underline{w})}{\|\underline{v}\|_s \cdot \|\underline{w}\|_s}$$

[1] Eigenwerte

4 Basen

Basen stellen das „Grundgerüst“ jedes Vektorraums dar. Zunächst müssen wir aber ein paar Begriffe klären.

4.1 Vorüberlegungen

Definition 4.1 *lineare Unabhängigkeit*

Eine Familie von Vektoren $(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n})$ heißt linear unabhängig wenn aus

$$\lambda_1 \underline{v_1} + \cdots + \lambda_n \underline{v_n} = 0$$

folgt

$$\lambda_i = 0 \ \forall \lambda_i$$

Zusatz 4.2 *lineare Unabhängigkeit mit Determinanten*

Für n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) lässt sich die lineare (Un-)Abhängigkeit mit Hilfe von Determinanten überprüfen. Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} | & & | \\ \underline{v_1} & \cdots & \underline{v_n} \\ | & & | \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underline{v_1}, \cdots, \underline{v_n} \text{ sind linear abhängig}$$

Folgerung 4.3

Enthält $(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n})$ den Nullvektor so ist diese Familie linear abhängig

Folgerung 4.4

Enthält $(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n})$ zwei identische Vektoren so ist diese Familie linear abhängig

Folgerung 4.5

Im $\mathbb{K}^n$ gibt es maximal n linear unabhängige Vektoren

Definition 4.6 *Span*

Der Span einer Familie von Vektoren $(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n})$ ist definiert als

$$\operatorname{span}(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}) = \{\lambda_1 \underline{v_1} + \cdots + \lambda_n \underline{v_n} \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$$

Definition 4.7 *Erzeugendenmenge*

Sei V der von $\operatorname{span}(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n})$ aufgespannte Raum. Dann nennt man $(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n})$ eine *Erzeugendenmenge* von V

Folgerung 4.8

Sei $\underline{v_i}$ darstellbar durch $\lambda_1 \underline{v_1} + \cdots + \lambda_{i-1} \underline{v_{i-1}} + \lambda_{i+1} \underline{v_{i+1}} + \cdots \lambda_n \underline{v_n}$ dann ist

$$\operatorname{span}(\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_n}) = \operatorname{span}(\underline{v_1}, \cdots, \underline{v_{i-1}}, \underline{v_{i+1}}, \cdots, \underline{v_n})$$

4.2 Basis eines Vektorraums

Definition 4.9 *allgemeine Basis*

Sei V ein Vektorraum. Eine Menge von Vektoren $B \subseteq V$ heißt Basis von V falls

(i) $V = \operatorname{span}(B)$

(ii) B ist linear unabhängig

Satz 4.10

Sei $B = (v_1, \ldots, v_n) \in V$ (V sei endlich erzeugt) dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

- B ist Basis von V
- B ist ein nicht verkürzbares Erzeugendensystem von V
- zu jedem $v \in V$ gibt es eindeutige Linearkombination aus $(v_1, \ldots, v_n)$
- B ist unverlängerbar linear unabhängig

Satz 4.11

Die Anzahl n der Elemente einer Basis eines Vektorraums ist gleich dessen Dimension

Satz 4.12

Jeder Vektorraum hat eine Basis

Satz 4.13 *Austauschsatz für Basen*

Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und sei $(w_1, \ldots, w_r) \in V$ linear unabhängig. Dann gilt

(i) $r \leq n$

(ii) Es gibt Indizes $i_1 \ldots i_r \in \{1 \ldots n\}$ sodass wenn man $v_{i_1} \ldots v_{i_r}$ aus der Basis weglässt und $w_1 \ldots w_r$ hinzufügt wieder eine Basis erhält

4.3 Orthonormalbasen

Eine besondere Form von Basen sind die Orthogonal- bzw. normalbasen. Die für die Vektorrechnung standardmäßig verwendete Einheitsbasis ist zum Beiszpel zweiteres.

Definition 4.14

Sei U ein Untervektorraum vn V. Eine Basis $u_1 \ldots u_d$ von U heißt Orthonormalbasis wenn

(i) $\langle u_i, u_i \rangle = 1$ für $i = 1 \ldots d$

(ii) $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ für $i, j = 1 \ldots d,\ i \neq j$

Zusatz 4.15 *Orthogonalbasis*

Gilt nur (ii) so nennt man $u_1 \ldots u_d$ *Orthogonalbasis*

Anstatt des üblichen Koordinatensystems kann man z.B. ein im Raum gedrehtes verwenden. Handelt es sich bei der dann entstandenen neuen Basis um eine Orthonormalbasis kann man die neuen Koordinaten des Vektors sehr einfach berechnen.

Satz 4.16 *Basisentwicklungssatz*

Sei $v \in U$ und $u_1 \ldots u_n$ eine Orthonormalbasis von U dann gilt

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i$$

4.4 Gram-Schmidt Verfahren

Oftmals begegnen wir Basen die nicht orthogonal oder orthonormal sind. Da dies aber das rechnen oftmals vereinfacht gibt es Wege um aus einer solchen Basis eine Orthonormalbasis zu machen.

Sei $v_1 \dots v_d$ eine Basis von U, dann sind $u_1 \dots u_d$ eine ONB

(i) $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

(ii) $w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1;\ u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$

(iii) $w_3 = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2;\ u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}$

(iv) $\vdots$

Um zu verhindern das sich durch das normieren bedingte Rundungsfehler immer stärker auswirken gibt es ein alternatives, aber etwas längeres Verfahren

(i) $w_1 = v_1$

(ii) $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$

(iii) $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$

(iv) $\vdots$

(v) $u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}, \dots, u_d = \frac{w_d}{\|w_d\|}$

4.5 Orthogonalraum

Definition 4.17

Sei W ein $d-$dimensionaler Unterraum von V dann ist der zugehörige Orthogonalraum $W^{\perp}$ definiert als

$$W^{\perp} := \{w' \in \mathbb{K}^n \mid w' \perp w \ \forall w \in W\}$$

Für den $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ ist dieser recht gut vorstellbar. So ist der Orthogonalraum einer Geraden durch den Ursprung genau die darauf senkrecht stehende Gerade bzw. Ebene und umgekehrt.

Satz 4.18

(i) $W^{\perp}$ ist Untervektorraum von V

(ii) $W^{\perp} \cap W = \{0\}$

(iii) $\dim(W^{\perp}) = n - d$

(iv) $(W^{\perp})^{\perp} = W$ (für $\dim W < \infty$)

4.6 Senkrechte Projektion

Die senkrechte Projektion ist am ehesten unter dem Begriff „Lot fällen“ bekannt und beschreibt die Abbildung eines Punktes auf den zu ihr nächstliegenden Punkt eines Raums.

Satz 4.19

Sei W ein Untervektorraum von V, $v \in V$ und sei $w_1 \cdots w_n$ eine Orthonormalbasis von W. Dann ist

$$P_W(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, w_i \rangle w_i$$

die senkrechte Projektion v' von v auf W

Folgerung 4.20

Die Projektion auf den zu W senkrechten Untervektorraum $W^{\perp}$ von V ergibt sich aus

$$P_{W^{\perp}}(v) = v - P_W(v)$$

Satz 4.21

Für die Abbildungsmatrix A zu P_W bezügliche einer Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ gilt

$$A_{ij} = (P_W(v_j))_{v_i}$$

Als Beispiel Eure Klausuraufgabe:

$$P_W(x) = x,\ P_W(u) = u,\ P_W(z) = \langle x, z\rangle x + \langle u, z\rangle u$$
$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \langle x, z\rangle \\ 0 & 1 & \langle u, z\rangle \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$