Übungen QM I Vorbereitungskurs

Blatt 4

1. **Zeeman-Effekt**

(a)

$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{A}$$
$$I = -e\,\nu = -e\,\frac{\omega}{2\,\pi} \tag{1}$$
$$A = r^2\,\pi$$
$$\rightarrow \vec{\mu} = -\frac{e\,\omega\,r^2}{2}\,\hat{n} \tag{2}$$

e ist hier positiv!

$$\vec{p} = m_e\,\vec{v} = m_e\,(\vec{\omega}\,\times\,\vec{r}) \tag{3}$$
$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m_e\,\vec{r} \times\,(\vec{\omega}\,\times\,\vec{r}) \tag{4}$$
$$|\vec{l}| = m_e\,\omega\,r^2 \tag{5}$$

Da $\vec{l}$ und $\vec{n}$ parallel zueinander sind, gilt:

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2\,m_e}\,\vec{l} \tag{6}$$

(b)

$$E^{(1)} = \frac{e\,B}{2\,m_e}\langle\,n, l, m_l|\,\hat{l_z}|n, l, m_l\rangle = \frac{\hbar\,e}{2\,m}\,m_l\,B = \mu_B\,m_l\,B \tag{7}$$

Das bedeutet, Zustände mit gleichem l spalten auf.

(c)

$$\begin{aligned}
&\vec{\mu} = \tfrac{\mu_B}{\hbar}\,B\,(2\,\vec{s} + \vec{l}) \\
&|\vec{\mu_j}| = \vec{\mu}\,\tfrac{\vec{j}}{|\vec{j}|} \\
&-\vec{\mu}\cdot\,\vec{B} = -(\vec{\mu}\cdot\,\tfrac{\vec{j}}{|\vec{j}|})(\tfrac{\vec{j}}{|\vec{j}|}\,\cdot\,\vec{B}) = \tfrac{\mu_B}{\hbar}\,\tfrac{(\vec{s}+\vec{l})\vec{j}(\vec{j}\vec{B})}{|\vec{j}|^2} = \tfrac{\mu_B\,B}{\hbar}\,j_z\,\tfrac{\vec{j}^2+\vec{s}\,\vec{j}}{|\vec{j}|^2} \\
&\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \rightarrow \vec{l}^2 = \vec{j}^2 - 2\,\vec{s}\,\vec{j} + \vec{s}^2 \rightarrow \vec{s}\,\vec{j} = \tfrac{1}{2}(\vec{j}^2 + \vec{s}^2 - \vec{l}^2)
\end{aligned} \tag{8}$$

$$E^{(1)} = \frac{\mu_B}{\hbar}\,B\,\langle\,n, j, m_j, l, s|j_z\frac{\vec{j}^2 + \frac{1}{2}(\vec{j}^2 + \vec{s}^2 - \vec{l}^2)}{|\vec{j}|^2}|n, j, m_j, l, s\rangle = \;= m_j\,g_j\,\mu_B\,B \tag{9}$$

mit

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \tag{10}$$

(d)

$$E^{(1)} = \frac{\mu_B\,B}{\hbar}\langle\,n, l, m_l, s, m_s|2\vec{s_z} + \vec{l_z}|n, l, m_l, s, m_s\rangle = \mu_B\,B\,(2\,m_s + m_l) \tag{11}$$

2. **Stark-Effekt**

(a)

$$E^{(1)}_{100} = e\,|\vec{E}|\,\langle 100|\hat{z}|100\rangle = \frac{e\,|\vec{E}|}{\pi\,a_B^3}\int\,d^3rze^{-\frac{2r}{a_B}} = 0 \tag{12}$$

Wegen der Symmetrie des Grundzustandes verschwindet die Korrektur erster Ordnung. Für die zweite Ordnung benötigen wir das Matrixelement:

$$\langle nlm|\hat{z}|100\rangle = \int d^3r\frac{u_{nl}(r)}{r}\,Y^*_{lm}(\theta,\phi)\,r\,\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_{10}\theta\,\frac{u_{10}}{r}\,\sqrt{4\pi} = \frac{\delta_{m0}\delta_{l1}}{\sqrt{3}}\int\,dr\,u_{n1}(r)\,r\,u_{10}(r) \tag{13}$$

Hierbei wurde $z = r\,\cos(\theta) = r\,(\frac{4\pi}{3})^{1/2}\,Y_{10}$ eingesetzt. Die Energiekorrektur lautet also:

$$E_{210}^{(2)} = e^2\,E^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\langle\, n10|\hat{z}|100\rangle|^2}{E_1 - E_n} \approx e^2\,E^2\,\frac{|\langle\, 210|\hat{z}|100\rangle|^2}{E_1 - E_n} \tag{14}$$

Mit den dem Matrixelement

$$\langle\, 210|\hat{z}|100\rangle = \frac{a_B}{\sqrt{3}} \int_0^\infty dr \frac{r^2\,e^{-r/2}}{2\sqrt{6}}\,r\,(2\,r\,e^{-r}) = \frac{2^7\,\sqrt{2}}{3^5}\,a_B \tag{15}$$

und der Energiedifferenz $\Delta E = -(3/8)e^2/a_B$ ergibt sich

$$E_{110}^{(2)} \approx -\frac{2^{18}}{3^{11}}\,a_B^3\,E^2 \approx -1.48\,a_B^3\,E^2 \tag{16}$$

Benutzt man auch die anderen angeregten Zustände in (14) mit, erhält man

$$E_{110}^{(2)} - \frac{4}{9}\,a_B^3\,E^2 \tag{17}$$

also ist man mit der grpoben Schätzung, dass nur der nächste Zustand beiträgt gar nicht so weit daneben.

(b) Der erste angeregten Zustand ist vierfach entartet. Folgende Zustände tragen bei:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \ |200\rangle \\ |2\rangle &= \ |210\rangle \\ |3\rangle &= \ |211\rangle \\ |4\rangle &= \ |21-1\rangle \end{aligned} \tag{18}$$

Da unser Störungshamiltonian nicht diagonal ist und wir entartete Eigenwerte vorliegen haben, müssen wir neu diagonalisieren. Wir benötigen dazu H_1 in Matrixform:

$$V = (\langle i|\hat{V}|i'\rangle) = (\langle i|e\,|\vec{E}|\,\hat{z}|i'\rangle) \tag{19}$$

die Diagonalelemente

$$\langle i|\hat{V}|i\rangle \propto \int_{-1}^{+1} d\cos\theta |\psi_{nlm}|^2 \cos\theta = 0 \tag{20}$$

verschwinden, da $|\psi_{nlm}|^2$ eine gerade Funktion ist. Außerdem

$$\langle nlm|\hat{V}|n'l'm'\rangle \propto \int d\phi\, exp[i(m-m')\phi] = 2\pi\,\delta_{mm'} \tag{21}$$

Also sind nur die Elemente

$$\langle 1|\hat{V}|2\rangle = \langle 2|\hat{V}|1\rangle = V_0 \tag{22}$$

ungleich null. Das zu lösende Eigenwertproblem lautet also:

$$\begin{pmatrix} 0 & V_0 & 0 & 0 \\ V_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \Delta\,E \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Dieses Problem hat die trivialen Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{zu} \quad \Delta E_3 = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{zu} \quad \Delta E_4 = 0 \tag{24}$$

also brauchen wir nur den entsprechenden Unterraum diagonalisieren. Aus der Bedingung für eine nicht-triviale Lösung

$$\begin{vmatrix} -\Delta E & V_0 \\ V_0 & -\Delta E \end{vmatrix} = 0 \tag{25}$$

ergibt sich $\Delta E_{1,2} = \pm V_0$. Die zugehörigen Eigenwerte sind

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{zu} \quad \Delta E_1 = V_0 \qquad \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{zu} \quad \Delta E_2 = -V_0 \tag{26}$$

Die gestörten Eigenfunktionen lauten also

$$\begin{array}{ll} \frac{|200\rangle + |210\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{zu} \quad E_{ungestoert} + V_0 & \frac{|200\rangle - |210\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{zu} \quad E_{ungestoert} - V_0 \\ |211\rangle \quad \text{zu} \quad E_{ungestoert} & |21-1\rangle \quad \text{zu} \quad E_{ungestoert} \end{array} \tag{27}$$

Die Größe der Energieverschiebung ist durch (19) gegeben:

$$V_0 = e\,E\,\langle 200|\hat{z}|210\rangle = e\,E \int d^3r\,\psi^*_{200}(\vec{r})\,r\,\cos\theta\,\psi_{210}(\vec{r}) \tag{28}$$

Die Auswertung des Integrals ergibt

$$V_0 = -3\,e\,E\,a_B \tag{29}$$

3. **WKB-Theorie**
Für gebundene Zustände gilt:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} dx\,\hbar k(x) = (n + \frac{1}{2})\hbar\pi \tag{30}$$

Hier ist k^2 gegeben durch $k^2 = \frac{2\,m}{\hbar^2}(E - F|x|)$. Die Bedingung

$$\sqrt{2\,m}\int_{x_{min}}^{x_{max}} dx\,\sqrt{E - F|x|} = 2\,\sqrt{2\,m}\int_0^{x_{max}} dx\,\sqrt{E - F|x|} = (n + \frac{1}{2})\hbar\pi \tag{31}$$

mit $F\,x_{max} = E$ folgt:

$$E = \frac{(F\,\hbar)^{2/3}}{m^{1/3}}\left[\frac{3\pi\,(n + \frac{1}{2})}{4\,\sqrt{2}}\right]^{2/3} \tag{32}$$