

Übungen QM I Vorbereitungskurs

Blatt 4

1. Zeeman-Effekt

Der Zeeman-Effekt beschreibt die Aufspaltung von Spektrallinien von Elektronen in einem sphärischen Potential unter Einfluss eines Magnetfelds. Dabei koppelt das Magnetfeld an den Gesamtdrehimpuls der Elektronen.

- (a) Gegeben sei ein Elektron in einem Zentralpotential. Berechnen sie das magnetische Moment

$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{A} \quad (1)$$

und drücken Sie es als Funktion des Drehimpulses l aus. Nehmen Sie an das Elektron sei spin-frei.

- (b) Der Hamilton des ungestörten Systems sei H_0 . Es wird nun ein Magnetfeld in \hat{z} -Richtung angelegt. Es gilt:

$$H = H_0 - \vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (2)$$

Berechnen Sie die Energiekorrektur zu den ungestörten Zuständen in erster Ordnung Störungstheorie. *Tipp: Die Eigenfunktionen des ungestörten hamiltonians lauten $|n, l, m_l\rangle$. Das bedeutet, dass n, l und m_l „gute“ Quantenzahlen sind, was wiederum bedeutet dass H_0 bezüglich der Eigenfunktionen der Quantenzahlen diagonal ist.*

Die sich ergebende Aufspaltung ist als normaler Zeemaneffekt bekannt. Der Begriff normal ist allerdings irreführend, da in den meisten Fällen der anormale Zeeman-Effekt vorliegt, bei dem der Spin nicht vernachlässigt wird. Der normale Zeeman-Effekt tritt nur in Atomen mit geschlossenen Schalen bei denen der Gesamt-Spin verschwindet auf.

Nun soll das Elektron einen Spin besitzen. Der ungestörte Hamiltonian enthält folgenden Term

$$H_0 = \dots + C \hat{l} \cdot \hat{s} \quad (3)$$

welcher zu der L-S-Kopplung führt. Wir unterscheiden nun zwei Fälle

- $V_B \ll V_{L-S}$

Ist V_B viel kleiner als V_{L-S} ist die Präzession von \vec{l} und \vec{s} um \vec{j} viel schneller als die Präzession von \vec{j} um \vec{B} . Daher koppeln \vec{s} und \vec{l} erst zu \vec{j} und präzedieren dann um das Magnetfeld. Die entstehende Energieaufspaltung bezeichnet man als anormalen Zeeman-Effekt

- $V_B \gg V_{L-S}$

In diesem Fall präzedieren \vec{s} und \vec{l} einzeln um das Magnetfeld. Es findet daher keine Kopplung zu einem Gesamtdrehimpuls statt. Diesen Effekt nennt man Paschen-Back-Effekt

- (c) Berechnen sie die Energiekorrektur erster Ordnung für den anormalen Zeeman-Effekt. Hierbei gilt es zu beachten, dass das vom Spin hervorgerufene magnetische Moment folgende Form hat:

$$\vec{\mu} = g_s \mu_B \vec{s} \quad (4)$$

g_s bezeichnet man als *Lande-Faktor*. Grob gesagt handelt es sich hierbei um einen relativistischen Effekt, der daher kommt, dass relativistisch erst eine Drehung um 4π eine Einheitstransformation ist. Er lässt sich im Rahmen der QED sehr genau bestimmen:

$$g_s \approx 2 \quad (5)$$

Tipp: $\vec{\mu}$ ist im Allgemeinen nicht parallel zu \vec{j} . Wichtig ist für die Energieaufspaltung die Projektion auf \vec{j} , da \vec{s} und \vec{l} viel schneller um \vec{j} präzedieren.

- (d) Berechnen sie die Energiekorrektur erster Ordnung für den Paschen-Back-Effekt.

2. Stark-Effekt

Der Stark-Effekt bezeichnet die Aufspaltung der Energieeigenwerte unter Einfluss eines elektrischen Feldes. Hier wollen wir konkret den Fall des Wasserstoffatoms behandeln.

- (a) Quadratischer Stark-Effekt

Berechnen Sie die Grundzustandsaufspaltung für das Wasserstoffatom im elektrischen Feld (in \hat{z} -Richtung) bis zur zweiten Ordnung Störungstheorie. Benutzen Sie dabei in den Summen der zweiten Ordnung jeweils nur den größten Term. Der Hamiltonian ist gegeben durch:

$$H = H_0 + e |E| \hat{z} \quad (6)$$

Die radialen Ortswellenfunktionen des Grundzustandes und des ersten angeregten Zustands im Wasserstoffatom lauten:

$$u_{10}(r) = \frac{2r}{a_b^{3/2}} e^{-\frac{r}{a_B}} \quad (7)$$

$$u_{20}(r) = \frac{(2 - r/a_B)}{2\sqrt{2}a_B^{3/2}} e^{-\frac{r}{2a_B}} \quad (8)$$

$$u_{21}(r) = \frac{r^2}{2\sqrt{6}a_B^{5/2}} e^{-\frac{r}{2a_B}} \quad (9)$$

die Gesamtwellenfunktion lautet:

$$|n, l, m_l\rangle = \frac{u_{nl}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (10)$$

Die Kugelflächenfunktionen lauten:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (11)$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta) \quad (12)$$

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{i\phi} \quad (13)$$

$$Y_{lm}^* = (-1)^m Y_{l,-m} \quad (14)$$

Benutzen sie die Vollständigkeitsrelation der Kugelflächenfunktionen:

$$\int d\Omega Y_{l'm'}^* Y_{lm} = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \quad (15)$$

(b) Linearer Stark-Effekt

Nun betrachten wir den ersten angeregten Zustand des Wasserstoffatoms. Wie lautet hier die Energieverschiebung erster Ordnung? Die Energie im Wasserstoff lautet

$$E_n = -\frac{e^2}{2a_B} \frac{1}{n^2} \quad (16)$$

3. WKB-Theorie

Berechnen Sie mit der WKB-Näherung die Energie-Eigenwerte eines im Potential $V = F \cdot |x|$ gebundenen Teilchens.