Übungen QM I Vorbereitungskurs

Blatt 2

---

1. Zeigen Sie folgende Kommutatorrelationen und Identitäten für den Drehimpulsoperator $\hat{\vec{L}}$
   (a) $[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}\hat{L}_l$
   Tipp: $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$ und $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$
   (b) $[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_+] = 0$
   (c) $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm$
   (d) $\hat{L}_\mp\hat{L}_\pm = \hat{\vec{L}}^2 - \hat{L}_z^2 \mp \hbar\hat{L}_z$
   (e) Drücken Sie $\hat{\vec{L}}$ explizit in Kugelkoordinaten aus
   Hinweis: $\vec{\nabla} = \hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{e}_\phi$

2. Dreidimensionaler isotroper harmonischer Oszillator
   (a) Lösen Sie den dreidimensionalen isotropen harmonischen Oszillator in kartesischen Koordinaten. D.h. Berechnen Sie die Energieeigenwerte.
   (b) Geben Sie den Entartungsgrad des Grundzustands, sowie der ersten drei angeregten Zustände an
   (c) Vergleichen Sie die Entartung mit den Ergebnissen der in der Vorlesung präsentierten rotationssymmetrischen Herleitung: $E_{nl} = \hbar\omega(2n + l + \frac{3}{2})$

3. Wasserstoffatom
   (a) Durch Einführung von dimensionslosen Größen $\rho = \kappa r$, $\kappa = \sqrt{\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}}$ sowie $\rho_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{|E|}}\frac{Ze^2}{\hbar}$ und einem Produktansatz $u(\rho) = \rho^{l+1}w(\rho)e^{-\frac{\rho}{2}}$ für den Radialanteil der Wellenfunktion $R(r) = \frac{u(r)}{r}$, kann für den Teil $w(\rho)$ des Ansatzes, der als Potenzreihe angenommen wurde, folgende Differentialgleichung gefunden werden:
   $$\left[\rho\frac{d^2}{d\rho^2} + 2(l+1-\rho)\frac{d}{d\rho} + (\rho_0 - 2l - 2)\right]w(\rho) = 0$$
   Wiederholen Sie nun die Schritte aus der Vorlesung, um eine Rekursionsvorschrift für die Koeffizienten der Reihe zu erstellen, eine Abbruchbedingung und eine Relation für die Bindungsenergie zu finden.
   (b) Zeigen Sie, dass für Zustände mit vorgegebener Hauptquantenzahl n und maximaler Bahndrehimpulsquantenzahl $l = n - 1$ gilt: $R_{n,n-1}(r) = const\ (r/a_0)^{n-1}\exp\left[-r/(na_0)\right]$
   (c) Mit diesem Wellenfunktionen berechne man die Erwartungswerte für r und r^2 und zeige: $\langle r\rangle_{n,n-1} = a_0 n(n + \frac{1}{2})$ und $\langle r^2\rangle_{n,n-1} = a_0^2 n^2(n+1)(n+\frac{1}{2})$
   (d) Wie verhält sich die relative radiale Unschärfe $\frac{\Delta r}{\langle r\rangle}$ im Grenzfall hoher Hauptquantenzahlen n?
   Hinweis: Bohrscher Radius $a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$

4. Dreidimensionaler sphärischer Potentialtopf
   (a) Für die Bewegung eines Teilchens im Potential $V(\vec{r}) = -V_0\,\Theta(a-|\vec{r}|)$ formuliere man die Schrödingergleichung in sphärischen Polarkoordinaten und bringe diese auf die Form der Besseldifferentialgleichung:
   $$\left[\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{d}{dz}\right) - \frac{l(l+1)}{z^2} + 1\right]R_l(z) = 0$$
   Untersuchen Sie außerdem das asymptotische Verhalten von $R_l(z)$ für $z \to 0$.
   (b) Zeigen Sie dass die Funktionen $j_0(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ und $n_0(z) = -\frac{\cos(z)}{z}$ die Besseldifferentialgleichung für $l = 0$ lösen. Weisen Sie zusätzlich nach, dass $j_1(z) = \frac{j_0(z)}{z} + n_0(z)$ und $n_1(z) = \frac{n_0(z)}{z} - j_0(z)$ Lösungen für $l = 1$ sind.
   (c) Wie lauten die Lösungen der Schrödingergleichung zu $l = 0, 1$ für den Potentialtopf im Innen- und Außenraum für Energien $-V_0 < E < 0$ und $E > 0$?
   Hinweis: Es bietet sich an für negative Energien die Lösungen im Außenraum mit Hilfe der Hankelfunktionen $h_l^{(1)}(z) = j_l(z) + in_l(z)$, $h_l^{(2)}(z) = j_l(z) - in_l(z)$ *auszudrücken.*

(d) Diskutieren Sie das Verhalten der Lösungen für $r \to \infty$. Machen Sie hierbei von der allgemeinen Definition der Bessel- und Neumannfunktionen Gebrauch:

$$j_l(z) = (-1)^l z^l \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \frac{\sin z}{z}$$
$$n_l(z) = -(-1)^l z^l \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \frac{\cos z}{z}$$