# Übungen QM I Vorbereitungskurs

Blatt 1

### 1) Teilchen im Delta-Potential

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse $m$ in einer Dimension in Anwesenheit eines Potentials $V(x)$

$$V(x) = -V_0 a\delta(x) \quad V_0 > 0, \quad a > 0 \tag{1}$$

**a)** Stellen Sie die Schrödingergleichung für dieses Problem auf.

**b)** Bestimmen Sie die Anschlussbedingung am Punkt $x = 0$. Gehen Sie dazu davon aus, dass die Wellenfunktion stetig und normierbar ist und daher insbesondere überall endlich ist. $|\psi(x)| \leq \infty$

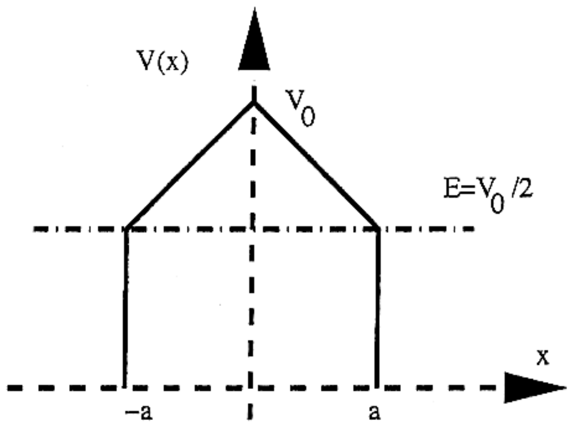
*Hinweis:* Integrieren Sie die Schrödingergleichung über das Intervall $[-\epsilon, \epsilon]$ um die Anschlußbedingung für die Ableitung der Wellenfunktion zu finden. Was ergibt sich dann für eine stetige Wellenfunktion im Grenzfall $\epsilon \to 0$

**c)**Lösen Sie die Schrödingergleichung für den Fall $E < 0$ und bestimmen sie mit Hilfe der Anschlußbedingungen die Energie des gebundenen Zustandes.

**d)** Welche Dimension hat die Konstante $a$, wenn $V_0$ die Dimension einer Energie hat? Warum? Können sie das am Ergebnis für die Bindungsenergie aus Aufgabe **c)** bestätigen.

### 2) Transmission

Berechnen Sie ln$T$, den Logarithmus der Transmissionswahrscheinlichkeit, für die in der Abbildung dargestellte Potentialschwelle näherungsweise im Grenzfall $\kappa a >> 1$, wobei $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar}$



**3) Rechnungen mit Operatoren**

**a)** Zeigen Sie, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reel sind.

**b)** Zeigen Sie, dass Eigenfunktionen zu hermiteschen Operatoren mit verschiedenen Eigenwerten orthogonal aufeinander stehen.

**c)** Zeigen Sie, dass für kommutierende Operatoren ein System gemeinsamer simultaner Eigenfunktionen existiert.

**d)** Zeigen Sie für $\left[\hat{A}, \hat{A}^{+}\right] = 1$ und für jede Funktion $f(\hat{A}^{+})$ gilt mit $\hat{A}\left|0\right\rangle = 0$:

$$\hat{A} f(A^{+})\left|0\right\rangle = \frac{df(\hat{A}^{+})}{d\hat{A}^{+}}\left|0\right\rangle$$

**e)** Zeigen Sie hieraus:

$$e^{\lambda\hat{A}} f(\hat{A}^{+})\left|0\right\rangle = f(\hat{A}^{+} + \lambda)\left|0\right\rangle$$

**f)** Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesche Operatoren. Ist das Produkt hermitesch? Stellen Sie $\hat{A}\hat{B}$ als Kombination von $\left\{\hat{A}, \hat{B}\right\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ und $\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$ dar.

**g)** Berechnen Sie den konjugierten Operator zu $\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$. Was lässt sich deshalb über den Operator $\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$ aussagen.

**4) Kommutatoreigenschaften**

Gegeben ist ein Hamilton- Operator der Form $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$ mit dem kinetischen Term $\hat{T} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}$ und einem Potential $\hat{V} = V(\mathbf{r})$

**a)** Berechnen sie für einen beliebigen zeitunabhängigen Operator $\hat{A}$ den Erwartungswert $\left\langle\psi_0\right|\left[\hat{H}, \hat{A}\right]\left|\psi_0\right\rangle$ des Kommutators von $\hat{H}$ und $\hat{A}$ im Energieeigenzustand $\left|\psi_0\right\rangle$ und zeigen sie, dass dieser verschwindet.

**b)** Berechnen sie den den Kommutator $\left[\hat{H}, \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{r}}\right]$. Zeigen sie mit dem Ergebnis aus **a)**, dass für für die Erwartungswerte in einem Energieeigenzustand $\left|\psi_0\right\rangle$ gilt: $2\left\langle\hat{T}\right\rangle = \left\langle\mathbf{r}\nabla V(\mathbf{r})\right\rangle$

**c)** Berechnen sie $\left\langle\mathbf{r}\nabla V(\mathbf{r})\right\rangle$ für den speziellen Fall eines Coulombpotentials ($V(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{r}$) und zeigen sie, dass gilt: $2\left\langle\hat{T}\right\rangle = -\left\langle\hat{V}\right\rangle$

**d)** Berechnen sie den Erwartungswert $\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle$ im Grundzustand des Wasserstoffatoms. Bestimmen sie mit diesem Ergebnis und dem Ergebnis aus **c)** den Ewartungswert der kinetischen Energie im Grundzustand. Vergleichen sie den Erwartungswert $\left\langle\hat{H}\right\rangle = \left\langle\hat{T}\right\rangle + \left\langle\hat{V}\right\rangle$ mit der Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms.

*Hinweis* Die Wellenfunktion im Grundzustand des H-Atoms ist: $\psi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}, a_0 = \frac{\hbar^2}{2m}$ außerdem gilt $\int_0^\infty dx x^n e^{-\alpha x} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

**5) Lösung des harmonischen Oszillators mittels Operatoren**

Für den eindimensionalen harmonischen Oszillator gilt:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} w^2 \hat{x}^2 = \hbar\omega \left\{\frac{\hat{p}^2}{2m\hbar\omega} + \frac{m}{2\hbar} w \hat{x}^2\right\} \tag{2}$$

**a)** Berechnen Sie die Kommutatorrelation $[\hat{x}, \hat{p}]$.

**b)** Berechnen Sie $\hat{a}^+\hat{a}$ für Operatoren $\hat{a} = \hat{A} + i\hat{B}$ mit $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesch.

**c)** Kann der Hamiltonoperator (2) mit Hilfe von b) in folgende Form gebracht werden?

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

Definieren Sie dazu den Term mit $\hat{p}^2$ in (2) als $\hat{B}^2$. Stellen Sie $\hat{a}^+$ und $\hat{a}$ durch Kombination von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ dar.

**d)** Berechnen Sie $[\hat{a}, \hat{a}^+]$. Weisen Sie $\left[\hat{H}, \hat{a}^+\right] = \hbar\omega\hat{a}^+$ und $\left[\hat{H}, \hat{a}\right] = -\hbar\omega\hat{a}$ nach.

**e)** Zeigen Sie: $\frac{\hbar\omega}{2}$ ist der kleinste Eigenwert von $\hat{H}$ und der zugehörige Grundzustand ist durch $\hat{a}\,|0\rangle = 0$ festgelegt. Berechnen Sie $|0\rangle$ in Ortsdarstellung.

**f)** $|n\rangle$ sei der normierte Eigenzustand zum Energieeigenwert $\hbar\omega(n + 1/2)$. Was ist $\hat{a}^+\,|n\rangle$ bzw. $\hat{a}\,|n\rangle$? Zeige:

$$\hat{a}^+\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,, \qquad \hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,.$$

**g)** Konstruieren Sie die normierten Eigenzustände $|n\rangle$ aus dem Grundzustand $|0\rangle$ (vgl. e) )

**h)** Drücken Sie die Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$ durch $\hat{a}$ und $\hat{a}^+$ aus. Berechnen Sie nun die Erwartungswerte $\langle n|\,\hat{x}^k\,|n\rangle$ für k=1,2. Wieso verschwinden die Erwartungswerte für ungerade k?

**6) Zeitliche Entwicklung von Wellenfunktionen**

Betrachten Sie in einer Raumdimension ein nichtrelativistisches Teilchen der Masse $m$, welches durch das Potential $V(x)$ in einem Bereich der Länge $a$ eingesperrt sei: $V(x) = 0$ für $0 \leq x \leq a$ und $V(x) = \infty$ für $x < 0, x > a$. Zur Zeit $t = 0$ sei die normierte Wellenfunktion des Teilchens gegeben durch

$$\Phi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{8}{5a}}\left[1 + cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right] sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

**a)** Bestimmen Sie einen vollständigen und orthonormierten Satz von Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ und die zugehörigen Energieeigenwerte $E_n$ des Hamiltonoperators mit dem angegebenen Potential $V(x)$.

**b)** Finden Sie nun die zeitliche Entwicklung $\Phi(x, t > 0)$ indem sie $\Phi(x, t)$ nach den $\psi_n(x)$ entwickeln:

$$\Phi(x, t) = \sum_n A_n(t)\psi_n(x)$$

Bestimmen sie $A_n(t = 0)$ für alle $n$. Wie lauten dann die $A_n(t)$?

**c)** Berechnen Sie den Energiemittelwert $\langle E(t)\rangle$ des Teilchens.
*Hinweis:*

$$sin(x)cos(x) = \frac{1}{2}sin(2x), \quad sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - cos(2x))$$