

Ferienkurs

Theoretische Elektrodynamik

Montag, 04.08.-08.08.2008

Vorlesungsnotizen

Autoren: Timon Mehrling, Korbinian Münster,
Matthias Danner, Karsten Donnay

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Grundlagen	4
1.1	Vektoranalysis	4
1.1.1	Skalarfelder	4
1.1.2	Vektorfelder	4
1.1.3	Integralsätze	4
1.2	Partielle Differentialgleichungen	5
1.2.1	Separationsansatz	5
1.2.2	Green-Funktion	6
2	Herleitung der Maxwell-Gleichungen	6
2.1	Elektrostatik	6
2.2	Magnetostatik	7
2.3	Zeitliche Dynamik	9
2.3.1	Verschiebungsstrom	9
2.3.2	Induktion	10
3	Der Formalismus der Elektrodynamik	11
3.1	Maxwell-Gleichungen	11
3.2	Linearität der Maxwell-Gleichungen und Superpositionsprinzip	12
3.3	Energieerhaltung, Poyntingsches Theorem	12
4	Zeitunabhängige Elektrodynamik	13
4.1	Statische Maxwell-Gleichungen	13
4.1.1	Statische Maxwellgleichungen in Form von Potentialen	13
4.1.2	Coulomb-Gesetz	14
4.1.3	Biot-Savartsches Gesetz	15
4.2	Multipolentwicklung	15
4.2.1	Elektrostatische Multipolentwicklung	17
4.2.2	Magnetostatische Multipolentwicklung	18
4.3	Stetigkeitsbedingungen bei Leitern, Randbedingungen	19
4.3.1	Dirichletsche Randbedingung	21
4.3.2	von Neumannsche Randbedingung	21
4.3.3	Spiegelladungsmethode	21
5	Statische elektromagnetische Felder in Medien	23
5.1	Statische elektrische Felder in Medien	24
5.2	Statische magnetische Felder in Medien	28
5.3	Energie von Feldern in Materie	31
6	Relativistik	32
6.1	physikalische Interpretation und relativistische Effekte	34
6.1.1	Galileitransformation - Lorentztransformation	34
6.1.2	Längenkontraktion, Zeitdilatation	36

6.1.3	relativistische Geschwindigkeits-Addition (in einer Raumdimension)	36
6.2	Vierervektoren, kovariant und kontravariant	37
6.3	Kovariante Form der Lorentzkraft	38
6.4	Kovariante Form der Maxwellgleichungen	39
6.5	Invarianten des elektromagnetischen Feldes	40
6.6	Potentiale und Eichinvarianz	41
7	Strahlung	43
7.1	Lösung der Inhomogenen Maxwellgleichungen	43
7.2	periodische Ströme, Fernfeldnäherung, Dipolnäherung	43

1 Mathematische Grundlagen

Wenn man erstmals mit der Elektrodynamik konfrontiert wird, hat man vermutlich mit der Vektoranalysis und dem damit verbundenen Auftreten von partiellen Differentialgleichungen, die größten Schwierigkeiten. Daher werden in den folgenden Abschnitten noch einmal die wichtigsten Resultate dieser Teilgebiete motiviert und ggf. abgeleitet. Die Argumentation wird dabei eher intuitiv als mathematisch Streng ausfallen.

1.1 Vektoranalysis

Die Vektoranalysis befasst sich mit der Beschreibung von *Feldern* und deren Dynamik. Für die Elektrodynamik sind dabei *Skalar-* und *Vektorfelder* am wichtigsten.

1.1.1 Skalarfelder

Ein Skalarfeld ist üblicherweise eine Funktion Φ , die jedem Punkt des Raumes eine Zahl $\Phi(\mathbf{x}, t)$ zuordnet, deren Wert zusätzlich noch von der Zeit abhängig sein kann. Um überhaupt Aussagen über die Dynamik eines Skalarfelds machen zu können, benötigt man die Ableitungen nach den Parametern.

Die Zeitableitung liefert dabei ein weiteres Skalarfeld $\partial_t \Phi(\mathbf{x}, t)$, die räumlichen Ableitungen hingegen ein Vektorfeld $\nabla \Phi(\mathbf{x}, t)$, das senkrecht auf den Äquipotentialflächen von Φ steht und die Richtung sowie das Maß des stärksten Anstiegs wiedergibt.

1.1.2 Vektorfelder

Ein Vektorfeld \mathbf{A} ordnet jedem Punkt des Raumes einen Vektor $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ zu. Verglichen mit dem Skalarfeld, ist die Beschreibung eines Vektorfelds jedoch wesentlich komplexer. Am Beispiel des Geschwindigkeitsfelds eines Flusses lässt sie sich jedoch gut veranschaulichen:

- Rotationsachse eines schwimmenden Körpers
- Veranschaulichung von FEYNMAN
- Quellen
- Erhöhung der Wassermenge (Zeitableitung)

1.1.3 Integralsätze

Bisher haben wir lediglich differenzielle Aussagen über das Verhalten von Feldern an bestimmten Punkten gemacht. Möchte man jedoch Aussagen über endliche Teilräume

machen, muss man die differentiellen Größen gewissermaßen „aufintegrieren“. Dazu führe man sich vor Augen, dass die Divergenz eines Vektorfeldes an einem Punkt gleich dem Oberflächenintegral über den Rand eines Volumenelements um diesen Punkt ist. Analog ist die Rotation eines Vektorfeldes an einem Punkt gleich dem Linienintegral über den Rand eines Flächenelements an diesem Punkt. In einer intuitiven, wenn auch etwas „unsauberen“ Notation also:

$$(\nabla \cdot \mathbf{V}) dV = \oint_{\partial(dV)} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$$

$$(\nabla \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\partial(dA)} ds \cdot \mathbf{V}$$

Will man nun den Fluss eines Vektorfeldes aus einem endlichen Volumen, bzw. das Linienintegral um eine endliche Fläche wissen, muss man lediglich über die einzelnen infinitesimalen Beträge integrieren. Dabei heben sich die Beiträge an den Grenzflächen bzw. -linien zweier benachbarter Volumen- bzw. Flächenelemente auf, so dass nur der Rand des Volumens bzw. der Fläche übrigbleibt. Die Integralsätze von STOKES und GAUSS beschreiben genau diesen Sachverhalt (der zweite ist dabei eigentlich ein Spezialfall des ersten). Sie lauten:

$$\int_A d\mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{V} = \oint_{\partial A} ds \cdot \mathbf{V}$$

$$\int_V dV \nabla \cdot \mathbf{V} = \oint_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$$

Ein weiterer Integralsatz, der ein Vektorfeld in einen rotations- und einen divergenzfreien Teil zerlegt, ist der *Zerlegungssatz* von HELMHOLTZ. Er lautet:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\nabla' \times \mathbf{V}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} - \nabla \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}$$

Außerdem besagt dieser Satz, dass ein Vektorfeld durch die Angabe seines Divergenz- und Rotationsfeldes eindeutig bestimmt ist. Dies ist der Grund dafür, dass man bei der Herleitung der Feldgleichungen für das elektrische, bzw. magnetische Feld lediglich nach Ausdrücken für die Divergenz und Rotation sucht.

1.2 Partielle Differentialgleichungen

1.2.1 Separationsansatz

Ist die Geometrie eines Problems so beschaffen, dass durch geeignete Koordinatenwahl Symmetrien ausgenutzt werden können und die Randflächen als Koordinatenflächen

darstellbar sind (Randbedingungen!), bietet sich ein Separationsansatz an. Beispielsweise kann der Ansatz

$$\Phi(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$$

dazu führen, dass die Differentialgleichung in vier Differentialgleichungen zerfällt; eine für jede Variable. (Mehr dazu in den Übungen)

1.2.2 Green-Funktion

Die GREEN-Funktion $G(\mathbf{x})$ eines Differentialoperators D ist wie folgt definiert:

$$DG(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$$

wobei δ die DIRAC'sche „Deltafunktion“ ist. Damit lässt sich die Lösung einer Differentialgleichung leicht angeben:

$$D\psi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \iff \psi(\mathbf{x}) = \psi_{hom}(\mathbf{x}) + \int d^n x' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') f(\mathbf{x}'),$$

Dabei ist ψ_{hom} Lösung der homogenen Differentialgleichung. Durch Anwenden von D überzeugt man sich leicht davon, dass ψ die gesuchte Lösung ist.

2 Herleitung der Maxwell-Gleichungen

2.1 Elektrostatik

Das elektrische Feld \mathbf{E} wird über die Kraft auf eine Ladung q definiert und ist damit eine Messgröße, was wiederum erst eine experimentelle Untersuchung erlaubt.

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

Das COULOMB-Gesetz

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2}$$

das die Kraft zwischen zwei Punktladungen q_1 und q_2 beschreibt sowie das Superpositionsprinzip ermöglichen es nun, eine Gleichung für das Elektrische Feld von n Punktladungen anzugeben:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^3}$$

Führt man nun eine Ladungsdichte ρ ein und verwendet die Tatsache, dass

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^3} = -\nabla \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \quad (1)$$

lässt sich \mathbf{E} wie folgt schreiben:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}}_{=: \Phi(\mathbf{x})} = -\nabla\Phi(\mathbf{x})$$

Dabei wurde das *elektrostatische Potential* Φ eingeführt. Wie man sieht, ist \mathbf{E} ein Gradientenfeld, was wiederum bedeutet, dass seine Rotation verschwinden muss:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Damit hat man schonmal einen Ausdruck für die Rotation des E -Feldes. Bleibt noch die Divergenz:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= -\Delta\Phi(\mathbf{x}) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \underbrace{\Delta \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}}_{= -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \\ &= \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Nach dem zweiten Gleichheitszeichen wurde hierbei die GREEN-Funktion des LAPLACE-Operators verwendet.

Damit sind die beiden ersten MAXWELL-Gleichungen der Elektrostatik gefunden:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

2.2 Magnetostatik

Die Definition des Magnetischen Felds \mathbf{B} erfolgt ebenfalls über ein Kraftgesetz. Auf ein Element $d\mathbf{l}$ eines mit dem Strom I durchflossenen Drahtes wirkt dabei eine Kraft $d\mathbf{F}$, für die gilt:

$$d\mathbf{F} \propto I, \quad d\mathbf{F} \propto d\mathbf{l}, \quad d\mathbf{F} \perp d\mathbf{l} \quad \iff \quad d\mathbf{F} \propto I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Im SI-System ergibt sich damit

$$d\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Damit liegt \mathbf{B} als Meßgröße fest und man kann nun experimentell untersuchen, welches Magnetfeld ein Stück Draht bei \mathbf{x}' , das vom Strom I durchflossen wird, am Ort \mathbf{x} erzeugt. Experimentell findet man folgendes:

$$dB \propto I dl, \quad d\mathbf{B} \perp d\mathbf{l}, \quad d\mathbf{B} \perp \mathbf{x} - \mathbf{x}', \quad dB \propto \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2}, \quad dB \propto \sin \angle(d\mathbf{l}, \mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

Dies lässt sich zum differenziellen BIOT-SAVART-Gesetz zusammenfassen:

$$d\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3}$$

Führt man nun noch die Stromdichte \mathbf{j} gemäß

$$I d\mathbf{l} = \mathbf{j} d^3x$$

ein, erhält man für \mathbf{B} folgenden, integralen Ausdruck:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \nabla \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') \\ &= \nabla \times \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}}_{=: \mathbf{A}} \\ &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

Dabei wurde das *Vektorpotential* \mathbf{A} eingeführt. Das Magnetfeld ist also ein Rotationsfeld. Damit folgt sofort:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

Bleibt noch die Rotation:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (3)$$

zunächst sehen wir uns nur den rechten Term genauer an:

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') \Delta \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

Für die Divergenz von \mathbf{A} erhält man:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \\ &= 0 \quad (\text{Magnetostatik})\end{aligned}\tag{5}$$

Nach dem zweiten Gleichheitszeichen wurde hierbei die Divergenz ausgeschrieben, Gleichung (1) verwendet und partiell integriert. Schließlich wurde noch verwendet, dass die Divergenz von stationären Strömen - wie es in der Magnetostatik der Fall ist - verschwindet. Aus den Gleichungen (3), (4) und (6) folgen schließlich mit Gleichung (2) die MAXWELL-Gleichungen der Magnetostatik:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

2.3 Zeitliche Dynamik

2.3.1 Verschiebungsstrom

Um die bisher erhaltenen Gleichungen zeitabhängig zu machen, liegt es nahe, von Gleichung (5) auszugehen und nicht-stationäre Ströme zuzulassen. Dazu zunächst eine wichtige Folgerung aus der Ladungserhaltung: Die in einem Volumen V enthaltene Ladung Q kann sich nur dann ändern, wenn ein Strom \mathbf{j} durch den Rand ∂V des Volumens fließt. D.h.:

$$\dot{Q} = - \oint_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}\tag{7}$$

Weiterhin gilt

$$\dot{Q} = \frac{d}{dt} \int_V d^3x \rho(\mathbf{x}) = \int_V d^3x \dot{\rho}(\mathbf{x})\tag{8}$$

wobei nach dem zweiten Gleichheitszeichen angenommen wurde, dass sich das Volumen nicht ändert.

Wendet man nun auf Gleichung (7) den Satz von GAUSS an und setzt sie anschließend mit (8) gleich, erhält man die *Kontinuitätsgleichung*.

$$\int_V d^3x \dot{\rho}(\mathbf{x}) = - \int_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad \iff \quad \dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0\tag{9}$$

Dieses Resultat setzt man jetzt in Gleichung (5) ein:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}}_{= 4\pi\epsilon_0 \cdot \Phi(\mathbf{x})} = -\epsilon_0\mu_0 \dot{\Phi}(\mathbf{x})$$

Einsetzen in Gleichung (3) liefert mit (4):

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \\ &= -\epsilon_0\mu_0 \nabla \partial_t \Phi + \mu_0 \mathbf{j} \\ &= \epsilon_0\mu_0 \partial_t \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned} \tag{10}$$

2.3.2 Induktion

1831 wurde von FARADAY beobachtet, dass die Änderung eines Magnetfeldes, das eine Drahtschleife mit einer konstanten Fläche A durchsetzt, eine Spannung an den deren Enden induziert.

$$U_{ind} = \oint_{\partial A} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = - \int_A d\mathbf{A} \cdot \partial_t \mathbf{B}$$

Wendet man darauf noch den Satz von STOKES an, sind die vier MAXWELL-Gleichungen der Elektrodynamik komplett:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \epsilon_0\mu_0 \partial_t \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned}$$

3 Der Formalismus der Elektrodynamik

3.1 Maxwell-Gleichungen

Die Maxwell-Gleichungen, hier im SI-System angegeben, das wir im Laufe dieser Vorlesung benutzen wollen¹,

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t); \quad (11)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0; \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0; \quad (13)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) \quad (14)$$

entsprechen, wie wir in der vorherigen Vorlesung sehen konnten bestimmten experimentellen Befunden. Wobei $\vec{E}(\vec{r}, t)$ den elektrischen Feldvektor, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ das magnetische Induktionsfeld, $\rho(\vec{r}, t)$ die elektrische Ladungsdichte und $\vec{j}(\vec{r}, t)$ die elektrische Stromdichte bezeichnen. Es sei hier kurz angemerkt, dass die Maxwell-Gleichungen im Fall der Existenz von magnetischen Monopolen symmetrisch werden würden.

Mit den Maxwellgleichungen und der *Lorentz-Kraft*

$$F_L(\vec{x}, t) = q \cdot \left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v}(t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right) \quad (15)$$

kann man gewissermaßen die gesamte Theorie der Elektrodynamik im Vakuum axiomatisieren, wobei die Lorentz-Kraft die Verbindung zu den Bewegungsgleichungen bildet. Dies macht die Elektrodynamik, die, wie wir später noch sehen werden, anders als die Newtonsche Theorie eine relativistische Theorie ist, mathematisch äußerst elegant.

In der Elektrodynamik hat sich das Konzept der Punktteilchen erfolgreich bewährt. Allerdings ist die klassische Elektrodynamik nicht bis zu kleinsten Abständen gültig, sondern ist als klassischer Grenzfall der Quantenelektrodynamik zu betrachten.

Wir wollen in dieser Vorlesung einige Eigenschaften der Elektrodynamik untersuchen, die aus den Maxwell-Gleichungen folgen.

¹Das SI-System wird gerne in der Experimentalphysik verwendet. Ein weiteres sehr beliebtes Einheitensystem ist das Gauß-System, da in ihm die relativistische Struktur der Elektrodynamik aufgrund der $1/c$ Faktoren besser zum Ausdruck kommt. Außerdem besitzen im Gauß-System das E- und B- Feld die selbe Einheit und lassen sich so eleganter durch Lorentztransformationen in einander überführen.

3.2 Linearität der Maxwell-Gleichungen und Superpositionsprinzip

Eine wichtige Eigenschaft der Maxwell-Gleichungen ist die Linearität. Sie beinhaltet analog zum Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen das Superpositionsprinzip. Lösungen der Maxwell-Gleichungen überlagern sich linear zu neuen Lösungen. Hat man beispielsweise das elektrische Feld E_1 einer statischen Ladungsverteilung ρ_1 und das elektrische Feld E_2 einer weiteren statischen Ladungsverteilung ρ_2 bestimmt, so lösen $E_{ges} = E_1 + E_2$ und $\rho_{ges} = \rho_1 + \rho_2$ wiederum die Maxwell-Gleichung.

3.3 Energieerhaltung, Poyntingsches Theorem

In diesem Abschnitt verzichte ich auf die umfangreiche Herleitung und stelle nur die wichtigsten Zusammenhänge dar.

Energiesatz der Elektrodynamik im Vakuum (Poyntingsches Theorem)

Für ein System aus geladenem Teilchen und elektromagnetischen Feldern gilt die Energiebilanzgleichung

$$\frac{\partial \epsilon_{mech}}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon_{em}}{\partial t} = -\nabla \vec{S}, \quad (16)$$

mit

$$\frac{\partial \epsilon_{mech}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (17)$$

Dies bezeichnet die zeitliche Ableitung der mechanischen Energiedichte.

$$\epsilon_{em}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{E}^2(\vec{r}, t) + \vec{B}^2(\vec{r}, t)}{2 \mu_0 \epsilon_0} \quad (18)$$

Hier definiert $\epsilon_{em}(\vec{r}, t)$ die elektromagnetische Energiedichte.

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (19)$$

Der Poyntingvektor $\vec{S}(\vec{r}, t)$ definiert die Energiestromdichte.

Das Poyntingsche Theorem kann als eine Art Kontinuitätsgleichung der Energie eines Systems betrachtet werden. Die zeitliche Änderung der totalen Energie in einem Volumen V ist gleich dem Fluss der Energie durch die V umschließende Fläche δV (auch $A(V)$ geschrieben).

$$\frac{d}{dt} (\epsilon_{em}(\vec{r}, t) + \epsilon_{mech}(\vec{r}, t))_V = - \int_{A(V)} d\vec{f} \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) \quad (20)$$

4 Zeitunabhängige Elektrodynamik

4.1 Statische Maxwell-Gleichungen

Betrachtet man den Spezialfall von Zeitunabhängigen Problemen der Elektrodynamik, so erkennt man, dass die Maxwell-Gleichungen in zwei entkoppelte Differentialgleichungssysteme zerfallen:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}); \quad (21)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0; \quad (22)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0; \quad (23)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (24)$$

Hier stellen Gleichungen (21) und (22) die Grundgleichungen der *Elektrostatik* und Gleichungen (23) und (24) die der *Magnetostatik* dar.

Die Kontinuitätsgleichung reduziert sich dann zu

$$\nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0. \quad (25)$$

Für die Magnetostatik bedeutet dies, es existiert kein Nettoladungsfluss d.h. $\vec{j}(\vec{r})$ ist Quellen- und Senkenfrei. Anschaulich kann man sich vorstellen, dass Stöme dann „im Kreis fließen“.

In der Elektrostatik existiert wegen $\partial\rho(\vec{r})/\partial t = 0$ kein Ladungsfluss.

4.1.1 Statische Maxwellgleichungen in Form von Potentialen

Es ist aus der Vektoranalysis bekannt, dass rotationsfreie Vektorfelder Gl. (22) als Gradientenfeld eines skalaren Feldes betrachtet werden können

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r}). \quad (26)$$

Ein divergenzfreies Vektorfeld Gl. (23) kann man schreiben als

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}). \quad (27)$$

Hierbei bezeichnet man $\Phi(\vec{r})$ als das *Elektrostatische Potential* und $\vec{A}(\vec{r})$ als *magnetisches Vektorpotential*.

Aufgrund (21) gilt dann

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) = \Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}). \quad (28)$$

Diese Gleichung wird statische *Poissongleichung* genannt. Für den Fall $\rho(\vec{r}) = 0$ heißt die so entstehende Gleichung $\Delta\Phi(\vec{r}) = 0$ *Laplace-Gleichung*.

Es stellt ein Grundsatzproblem der Elektrostatik dar, aus bekannter Ladungsverteilung das elektrostatische Potential zu bestimmen. Wie wir in der ersten Vorlesung sehen konnten, lässt sich diese Gleichung mit der *Greenschen-Funktion*²

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + const \quad (29)$$

lösen.

Mit Gleichung (24) folgt analog

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (30)$$

Auch hier existiert eine Lösung für das Vektorpotential (man beachte die Ähnlichkeit mit (29)):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (31)$$

Man sieht, dass für Gleichung (30) mit der Vektoridentität $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}$ auch die so genannte *Coulombgleichung* $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ benutzt wurde. Für das elektrostatische Potential existiert eine ähnliche Form der Eichfreiheit. Auf diese Eichfreiheiten wird in der vierten Vorlesung eingegangen.

4.1.2 Coulomb-Gesetz

Man erhält nun mit Gleichung (21), (26) und (29) das *Coulombsche Gesetz* für eine ruhende Punktladung mit der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ im Punkt r_0 ³:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r}) = \nabla_r \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}. \quad (32)$$

Mit dem Coulombschen Gesetz wird das Feld einer Punktladung mit Ladung q am Ort r_0 beschrieben.

Das Coulombsche Gesetz wurde hier von den Maxwell-Gleichungen ausgehend hergeleitet, um die mathematisch elegante Struktur der Elektrodynamik aufzuzeigen. Historisch bildet es als experimenteller Befund die Grundlage der Elektrostatik und wird in der Experimentalphysik oft in der Form

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\vec{F}_{2,1} \quad (33)$$

²Die Konstante verschwindet bei Berechnung von E und ist ohne physikalische Bedeutung.

³Ich indiziere hier den Nablaoperator mit r, um zu verdeutlichen, dass der Gradient wie üblich bzgl. r und nicht r' ausgeführt wird.

angegeben. Hier ist $\vec{F}_{1,2}$ die von Teilchen 2 auf Teilchen 1 ausgeübte Kraft. Die Coulomb-Kraft erhält man leicht aus unserer mathematischen Formulierung, indem man die Lorentz-Kraft, Gleichung (15), benutzt.

Wegen dem schon vorher erwähnten Superpositionsprinzip überlagern sich Felder und die durch sie induzierten Kräfte (bzw. Lösungen der Maxwell-Gleichungen) linear. Man kann deshalb leicht die Kraft beschreiben, die mehrere Punktladungen q_j auf eine Punktladung q_1 ausüben:

$$\vec{F}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=2}^N \frac{r_1 - r_j}{|r_1 - r_j|^3}. \quad (34)$$

4.1.3 Biot-Savartsches Gesetz

Mit Gleichung (24), (27) und (31) finden wir analog

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \nabla_r \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left(\vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right). \quad (35)$$

Diese Gesetzmäßigkeit nennt sich *Biot-Savartsches Gesetz* und beschreibt das durch den Strom $\vec{j}(\vec{r}')$ an der Stelle r induzierte \vec{B} -Feld. Mit dem Biot-Savartschen Gesetz und der Lorentz-Kraft kann man das *Ampèresche Gesetz* herleiten, das die Wechselwirkung zwischen zwei stromdurchflossenen Leiterschleifen C_1 und C_2 mit Strom I_1 und I_2 beschreibt:

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_1 \times [d\vec{r}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}. \quad (36)$$

Das Ampèresche Gesetz übernimmt dieselbe Rolle für die Magnetostatik wie das Coulombsche Gesetz für die Elektrostatik.

4.2 Multipolentwicklung

Oftmals ist es sehr schwer, bei einer komplexen Ladungsdichteverteilung $\rho(\vec{r}')$ bzw. Stromdichteverteilung $\vec{j}(\vec{r}')$ die zugehörigen Felder und Potentiale anhand Gleichung (29) bzw. (31) zu ermitteln. Deshalb versucht man bei statischen Ladungs- und Stromdichteverteilungen, die auf den Bereich $|\vec{r}'| \leq R_0$ begrenzt sind ($\rho(\vec{r}' > R_0) = 0$), die Potentiale für große Entfernungen $|\vec{r}| \gg R_0$ approximativ zu berechnen⁴. Hierzu

⁴Meist interessiert nur das asymptotische Verhalten der Potentiale und Felder in der Fernzone.

nutzt man das aus der Analysis bekannte Verfahren der Taylorentwicklung in mehreren Veränderlichen⁵.

Wir entwickeln also den inversen Abstand $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$ des Integranden in (29) bzw. (31) um $\vec{r}' = \vec{0}$:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{1}{\alpha! \beta! \gamma!} \left[\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x_1'^\alpha \partial x_2'^\beta \partial x_3'^\gamma} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right]_{\vec{r}'=0} \cdot x_1'^\alpha x_2'^\beta x_3'^\gamma \quad (37)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{|\vec{r}|}}_{\alpha=0, \beta=0, \gamma=0} + \underbrace{x_1' \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_1'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right]_{\vec{r}'=0}}_{\alpha=1, \beta=0, \gamma=0} + \underbrace{x_2' \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_2'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right]_{\vec{r}'=0}}_{\alpha=0, \beta=1, \gamma=0} + \underbrace{x_3' \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_3'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right]_{\vec{r}'=0}}_{\alpha=0, \beta=0, \gamma=1} + \dots \quad (38)$$

Wir können nun wegen

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right]_{\vec{r}'=0} = - \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right]_{\vec{r}'=0} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\vec{r}|} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} \quad (39)$$

Gleichung (38) wie folgt schreiben:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} - \sum_{i=1}^3 x_i' \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x_i' x_j' \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} + \dots \quad (40)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass der dritte Summand aus den aus (37) resultierenden Termen der Art $\alpha + \beta + \gamma = 2$ hervorgeht.

Werden die partiellen Differentiationen in (40) ausgeführt, so folgt schließlich

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i' x_i}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x_i' x_j' \left(\frac{3 x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) + \dots \quad (41)$$

⁵Hier: drei Raumrichtungen.

4.2.1 Elektrostatistische Multipolentwicklung

Setzen wir diese Entwicklung in (29) ein, so erhalten wir

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0(\vec{r}) + \Phi_1(\vec{r}) + \Phi_2(\vec{r}) + \dots \quad (42)$$

mit

- **Elektrischer Monopol**

$$4\pi \epsilon_0 \Phi_0(\vec{r}) = \frac{1}{r} \int d^3 r' \rho(\vec{r}') = \frac{Q}{r}, \quad Q = \int d^3 r' \rho(\vec{r}'). \quad (43)$$

Man nennt diesen Term *Elektrisches Monopolmoment*. In großer Entfernung dominiert dieser Term in der Entwicklung. Das heißt von weiter Entfernung betrachtet wirkt jede statische Ladungsverteilung wie eine Punktladung.

- **Elektrischer Dipol**

$$4\pi \epsilon_0 \Phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^3 x_i \int d^3 r' x'_i \rho(\vec{r}') = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3}, \quad p_i = \int d^3 r' x'_i \rho(\vec{r}'). \quad (44)$$

Hier nennt man \vec{p} das *Elektrische Dipolmoment* der Ladungsverteilung.

- **Elektrischer Quadrupol**

$$4\pi \epsilon_0 \Phi_2(\vec{r}) = \sum_{i,j=1}^3 \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{2r^5} \int d^3 r' x'_i x'_j \rho(\vec{r}'). \quad (45)$$

Dieser Ausdruck kann vereinfacht werden, indem man die Null in Form von

$$0 = \sum_{i,j=1}^3 \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{6r^5} \int d^3 r' r'^2 \delta_{ij} \rho(\vec{r}') \quad (46)$$

hinzuaddiert, so dass

$$4\pi \epsilon_0 \Phi_2(\vec{r}) = \sum_{i,j=1}^3 \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{6r^5} Q_{ij}, \quad Q_{ij} = \int d^3 r' (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}') \quad (47)$$

wobei Q_{ij} das *Elektrische Quadrupolmoment* definiert. Da Q_{ij} spurlos ist ($\sum_{i=1}^3 Q_{ii} = 0$) verschwindet der zweite Term in (47) und wir erhalten

$$4\pi \epsilon_0 \Phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij}. \quad (48)$$

Die Matrix Q_{ij} verhält sich wie ein Tensor 2. Stufe und besitzt 9 Komponenten.

- Der nächste Term der Entwicklung (42) enthält das *Oktupolmoment*. Es ist ein Tensor 3. Stufe und besitzt 27 Komponenten.

4.2.2 Magnetostatische Multipolentwicklung

Für das Vektorpotential ergibt sich mit (31) und (41) analog

- **Magnetischer Monopol**

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{1}{r} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}'). \quad (49)$$

Zur weiteren Argumentation benötigen wir folgenden Hilfssatz:

Seien $f(\vec{r}')$, $g(\vec{r}')$ stetig differenzierbare skalare Felder. So gilt in der Magnetostatik wegen $\nabla_{r'} \cdot \vec{j}(\vec{r}') = 0$:

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \int d^3 r' \left[f(\vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_{r'} g(\vec{r}') + g(\vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_{r'} f(\vec{r}') \right] \\ &= \int_{V \rightarrow \infty} dV \nabla \cdot (g f \vec{j}) = \oint_{A(V \rightarrow \infty)} d\vec{f} \cdot (g f \vec{j}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Wir setzen nun $f = 1$ und $g = x'_1, x'_2, x'_3$ und erhalten

$$\int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \hat{e}_{x'_1, x'_2, x'_3} = 0 \quad (51)$$

$$\Rightarrow \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') = 0. \quad (52)$$

Die Statischen Maxwellgleichungen (21-24) postulieren also die Nichtexistenz von magnetischen Monopolen.

- **Magnetischer Dipol**

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{1}{r^3} \int d^3 r' (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}'). \quad (53)$$

Um (53) leichter berechnen zu können benutzen wir wieder (50) und setzen $f = x'_i$ und $g = x'_j$ ($i, j = 1, 2, 3$).

Nun folgt

$$0 = \int d^3 r' (x'_i j_j(\vec{r}') + x'_j j_i(\vec{r}')) \quad (54)$$

$$\Rightarrow \int d^3 r' x'_i j_j(\vec{r}') = - \int d^3 r' x'_j j_i(\vec{r}'). \quad (55)$$

Sein nun \vec{a} ein beliebiger Vektor, so sehen wir

$$\vec{a} \int d^3 r' \vec{r}' j_i(\vec{r}') = \sum_{j=1}^3 a_j \int d^3 r' x'_j j_i(\vec{r}') \quad (56)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 a_j \int d^3 r' (x'_i j_j(\vec{r}') - x'_j j_i(\vec{r}')) \quad (57)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j \int d^3 r' (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}'))_k. \quad (58)$$

Es gilt also die Vektoridentität

$$\int d^3 r' (\vec{a} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') = -\frac{1}{2} \left[\vec{a} \times \int d^3 r' (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) \right]. \quad (59)$$

Und wir erhalten schließlich aus (53)

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3}, \quad \vec{\mu} = \frac{1}{2} \int d^3 r' (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) \quad (60)$$

Hier bezeichnet $\vec{\mu}$ das *magnetische Dipolmoment*.

4.3 Stetigkeitsbedingungen bei Leitern, Randbedingungen

Im folgenden betrachten wir das elektrostatische Problem der Art:

Ein Volumen V ist durch Metallflächen begrenzt. In V ist die Ladungsverteilung bekannt. Gesucht ist das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ in V .

In einem Metall können sich Leitungselektronen (näherungsweise) frei bewegen. Diese bewirken ein sich einstellendes Gleichgewicht mit

$$\vec{E} = 0 \quad (61)$$

im Metall. Für $\vec{E} \neq 0$ wirkt so lange eine Kraft auf die Elektronen, bis $\vec{E} = 0$ gilt. Daraus folgt:

$$\Phi(\vec{r}) = \text{const} \quad (62)$$

im Metall.

Mit Hilfe des Gaußschen oder des Stokesschen Satzes können wir eine Aussage über das Feld an der Grenzfläche R zwischen Vakuum und Metall machen.

Aus Linienelementen der Länge l , die parallel zur Grenzfläche liegen bilden wir die Rechteckfläche ΔA (Abb.1). Der Abstand zwischen den Linienelementen wird infinitesimal klein gemacht.

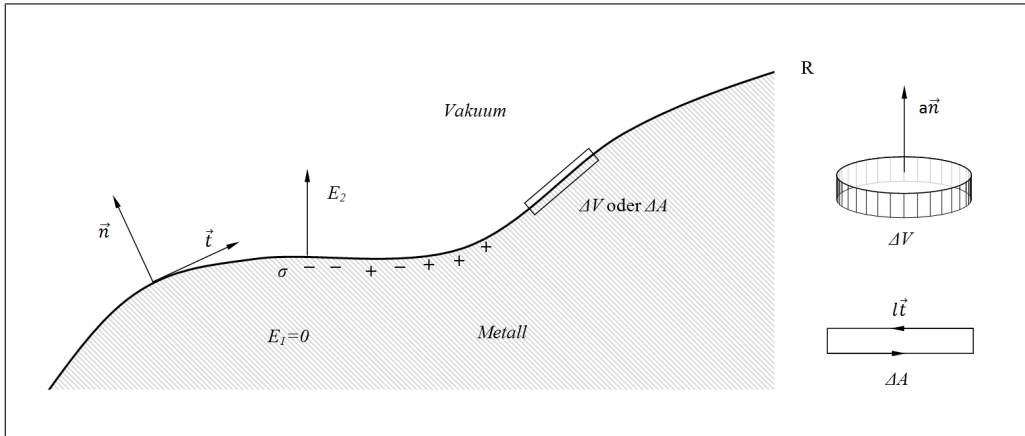


Abbildung 1: *Vakuum, das durch Metall begrenzt wird. Im Inneren verschwindet das elektrische Feld \vec{E} , am Rand des Metalls gibt es die Oberflächenladung σ . Der Vektor \vec{n} beschreibt den Normalenvektor von R und \vec{t} ist ein zu R tangentialer Vektor. \vec{E}_1 beschreibt das elektrische Feld im Metall und \vec{E}_2 das im Vakuum.*

Mit $\nabla \times \vec{E} = 0$ und dem Stokesschen Satz erhalten wir:

$$0 = \int_{\Delta A} d\vec{A} \cdot \nabla \times \vec{E} = \oint d\vec{r} \cdot \vec{E} = l\vec{t} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1). \quad (63)$$

Wie wir sehen konnten (61) gilt $\vec{E}_1 = 0$. Damit ergibt sich

$$\vec{t} \cdot \vec{E}_2(\vec{r}) \Big|_{\vec{r} \in R} = 0. \quad (64)$$

Das bedeutet:

Es gibt keinen tangentialen Anteil des elektrischen Feldes am Rand R .

Wir bilden nun das Volumenelement ΔV aus zwei parallelen Flächenelementen, die in infinitesimalem Abstand zueinander liegen (Abb. 1). Zwischen ihnen liegt der Rand R . Wir wenden nun den Gaußschen Satz auf das Volumenelement mit der Oberfläche $A = A(\Delta V)$ an:

$$\oint_{A(\Delta V)} d\vec{A} \cdot \vec{E} = a\vec{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Delta V} d^3r \rho = \frac{1}{\epsilon_0} q. \quad (65)$$

Da wir den Abstand zwischen den begrenzenden Flächen infinitesimal klein gemacht haben, tragen nur Ladungen, die direkt an der Oberfläche sitzen zu q bei. Wir führen

deshalb die Oberflächenladung $\sigma(\vec{r}) = q/a$ ein und berücksichtigen $\vec{E}_1 = 0$. Damit erhalten wir für (65)

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\vec{r}). \quad (66)$$

Das heißt:

Die Normalkomponente des elektrischen Feldes am Rand R ist $1/\epsilon_0$ mal die Oberflächenladung des Metalls.

4.3.1 Dirichletsche Randbedingung

Aus (64) folgt:

$$0 = \vec{t} \cdot \nabla \Phi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r} \in R} = \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial t} \Big|_{\vec{r} \in R}. \quad (67)$$

Und damit erhalten wir die *Dirichlet-Randbedingung*

$$\Phi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r} \in R} = \Phi_0(\vec{r}). \quad (68)$$

Insbesondere gilt $\Phi = \text{const}$ auf einer Leiteroberfläche.

4.3.2 von Neumannsche Randbedingung

Mit (66) erhalten wir

$$\frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial n} \Big|_{\vec{r} \in R} = \vec{n} \cdot \nabla \Phi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r} \in R} = -\vec{n} \cdot \vec{E}_2 \quad (69)$$

$$= -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\vec{r}) \quad (70)$$

die von *Neumannsche Randbedingung*. Dies bedeutet Φ ist stetig auf R , aber $\vec{n} \cdot \nabla \Phi$ macht einen Sprung. Dirichletsche- und Neumannsche Randwertprobleme können formal durch Greensche Funktionen gelöst werden.

4.3.3 Spiegelladungsmethode

Nachdem wir eine Klasse von Randwertproblemen betrachtet und deren Eigenschaften genauer spezifiziert haben, wollen wir nun eine Möglichkeit zur Lösung einer Art von Randwertproblemen aufzeigen.

Wir stellen uns als Beispiel eine Punktladung im Vakuum im Abstand a vor einer geerdeten Metalloberfläche vor (Abb. 2).

Gesucht ist nun die Lösung von $\Delta \Phi(\vec{r}) = -1/\epsilon_0 \rho(\vec{r})$ mit $\rho(\vec{r}) = q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{a})$, $\vec{a} = (a, 0, 0)$

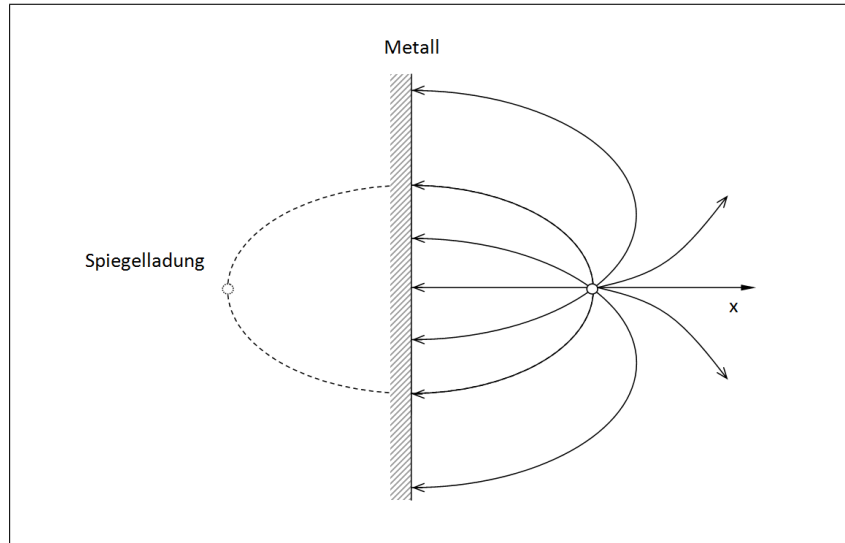


Abbildung 2: Punktladung vor einer Metalloberfläche.

unter einer Randbedingung vom Dirichlet-Typ: $\Phi|_{x=0} = 0$. Für $x < 0$ soll $\Phi = 0$ gelten. Wir können uns eine virtuelle *Spiegelladung* mit Ladung q_s am Ort $\vec{r}_s = (x_s, 0, 0)$ vorstellen, und deren Wirkung untersuchen. Es liegt nahe, dass eine punktförmige Spiegelladung auf der x-Achse unsere Randbedingung erfüllt.

Wir finden dann:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{r} - \vec{a}|} + \frac{q_s}{|\vec{r} - \vec{r}_s|} \right). \quad (71)$$

Wir sehen, dass die Randbedingung $\Phi|_{x=0} = 0$ für den Fall $x_s = -a$ und $q_s = -q$ erfüllt ist und unsere gesuchte Lösung lautet:

$$\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{r} + \vec{a}|} \right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (72)$$

Wir wollen nun die Influenzladung auf der Metalloberfläche mit Hilfe der Neumannschen Randbedingung berechnen.

$$\sigma(\vec{r})|_{x=0} = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial n} \right|_{x=0} = -\epsilon_0 \vec{n} \cdot \nabla\Phi(\vec{r})|_{x=0} = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (73)$$

$$= \frac{q}{4\pi} \left(\frac{-2a}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \quad (74)$$

Auf die gesamte influenzierte Ladung können wir nun leicht schließen, indem wir $\sigma(\vec{r})$ über die gesamte Metalloberfläche integrieren.

5 Statische elektromagnetische Felder in Medien

In einem Medium bestimmen die Ladungs- und Stromverteilung auf atomarer Skala die elektromagnetischen Felder, d.h. $\rho_{micro}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{j}_{micro}(\mathbf{x})$ werden durch die Elektronen und Atomkerne erzeugt. ρ_{micro} und \mathbf{j}_{micro} sind nur im *Zeitmittel* statisch (in der Quantenmechanik entspricht dies stationären Zuständen). Die statischen **Maxwellgleichungen** gelten zuerst einmal auf mikroskopischer Skala:

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{E}_{micro}(\mathbf{x}) &= \rho_{micro}(\mathbf{x})/\varepsilon_0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_{micro}(\mathbf{x}) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}_{micro}(\mathbf{x}) &= \mu_0 \mathbf{j}_{micro}(\mathbf{x}) \\ \nabla \mathbf{B}_{micro}(\mathbf{x}) &= 0\end{aligned}$$

Die genauen mikroskopischen Verteilungen ρ_{micro} und \mathbf{j}_{micro} sind unglaublich kompliziert: ist man z.B. in der Nähe eines Elektrons, dann ist das Feld riesig, ein kleines Stück weiter könnte es aber schon wieder sehr, sehr klein sein und in eine ganz andere Richtung zeigen. Außerdem ändert sich durch die Eigenbewegung der Atome ständig ihre Konfiguration und damit das Feld.

Damit ist es fast unmöglich das genaue mikroskopische Feld zu berechnen und es ist auch nicht sinnvoll: das physikalisch relevante Feld ist das über ein kleines Volumen ΔV *gemittelte* Feld ($\Delta V \approx (10 \text{ nm})^3$, enthält typischerweise 10^6 Atome), das genug Atome enthält um einen glatten Verlauf von \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Feld zu garantieren aber trotzdem klein genug ist, um alle wichtigen größeren Variationen der Felder zu erfassen:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}) &\equiv \frac{1}{\Delta V} \int d^3x' \mathbf{E}_{micro}(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) &\equiv \frac{1}{\Delta V} \int d^3x' \mathbf{B}_{micro}(\mathbf{x} + \mathbf{x}')\end{aligned}$$

Dementsprechend betrachtet man die **ortsgemittelten mikroskopischen Maxwellgleichungen** ($\langle \cdot \rangle \equiv$ Ortsmittel):

$$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \langle \rho_{micro} \rangle(\mathbf{x})/\varepsilon_0 \tag{M1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0 \tag{M2}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \langle \mathbf{j}_{micro} \rangle(\mathbf{x}) \tag{M3}$$

$$\nabla \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0 \tag{M4}$$

Man benötigt nun materialspezifische Ansätze für $\langle \rho_{micro} \rangle$ und $\langle \mathbf{j}_{micro} \rangle$.

5.1 Statische elektrische Felder in Medien

Wir müssen nun zwei Arten von Medien unterscheiden: (ideale) **Leiter** und **Nichtleiter**.

Im Inneren von (idealen) Leitern ist $\mathbf{E} = 0$, da sich in einem von außen angelegten Feld die Ladungsträger so lange umverteilen bis die induzierten Ladungen komplett das Feld im Inneren aufheben. Damit folgt im Inneren des (idealen) Leiters mit (M1) auch sofort $\langle \rho_{micro} \rangle = 0$. Die einzige nicht-verschwindende Ladungsdichte befindet sich an der Oberfläche des Leiters.

Die Eigenschaften von Leitern wurden schon im Detail in der vorigen Vorlesung besprochen, weshalb wir uns nun direkt dem Fall der **Nichtleiter** (oder Dielektrika) zuwenden. In Nichtleitern werden die neutralen Atome und Moleküle im elektrischen Feld polarisiert, d.h. die Ladungen der Elektronen und Atomkerne bzw. die Ladungsschwerpunkte der Moleküle werden gegeneinander verschoben und damit (in führender Ordnung) lokale Dipolmomente induziert:

$$\mathbf{p} = \bar{\alpha} \mathbf{E} \quad (75)$$

mit $\bar{\alpha}$: Polarisierbarkeit, i.A. eine tensorielle Größe. Dies führt zu einer makroskopischen Polarisation des Mediums:

$$\mathbf{P} = \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{V} \quad (76)$$

(Für eine ausführlichere Einführung zum Thema Polarisation sind S. 160-166 in Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, zu empfehlen.)

Ausgehend vom Feld eines elektrischen Dipols

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (77)$$

können wir das Feld eines polarisierten Objektes berechnen, wobei $\mathbf{p} = \mathbf{P} d^3x$ als mittleres Dipolmoment in jedem Volumenelement d^3x verstanden wird:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (78)$$

Wir dürfen an dieser Stelle das Feld eines elektrischen Dipols verwenden, denn wir

interessieren uns ja nur für das mittlere Dipolmoment in einem genügend kleinen Volumen (siehe Diskussion zu Anfang der Vorlesung). Im Rahmen dieser Betrachtungsweise ist es egal ob wir einen tatsächlichen reinen Dipol oder einen 'physikalischen' Dipol betrachten, denn unsere Ortsmittelung war genauso gewählt, dass der 'physikalische Dipol' alle relevanten Informationen über das makroskopische Feld enthält.

Der Ausdruck (78) lässt sich noch geschickt umschreiben, denn verwendet man $\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} = \nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)$ und die inverse Produktregel $\mathbf{A}(\nabla f) = \nabla(f\mathbf{A}) - f(\nabla\mathbf{A})$, dann ergibt sich

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \nabla\left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} (\nabla\mathbf{P}) \quad (79)$$

Anwendung des Gauß'schen Satzes vereinfacht das erste Integral:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial V} d\mathbf{A}' \mathbf{P} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} (\nabla\mathbf{P}) \quad (80)$$

Den ersten Term identifiziert man als das Feld einer Obeflächenladung, den zweiten als das Feld einer Volumenladung:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial V} dA' \frac{\sigma_b}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho_b}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \quad (81)$$

wobei

$$\sigma_b = \mathbf{P} \hat{n} \quad \rho_b = -\nabla \mathbf{P} \quad (82)$$

Die Ladungen σ_b und ρ_b sind nicht nur ein mathematisches Konstrukt zur Beschreibung der makroskopischen Auswirkung der Polarisation, sondern sie entsprechen tatsächlichen (gebundenen) Ladungsverteilungen im Dielektrikum! (Ein ausführlichere Erläuterung dazu wird z.B. in Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, auf S. 170/171 gegeben.)

Der Allgemeine Ansatz für die ortsgemittelte Ladungsdichte im Inneren eines Dielektrikums ist damit:

$$\langle \rho_{micro} \rangle = \rho_f + \rho_b \quad (83)$$

wobei ρ_f die externe freie Ladungsdichte und ρ_b die oben berechnete Polarisationsladung von gebundenen Teilchen ist.

Verwendet man diesen Ansatz in (M1) so erhält man:

$$\epsilon_0 \nabla \mathbf{E} = \langle \rho_{micro} \rangle = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \mathbf{P} \quad (84)$$

$$\Rightarrow \nabla(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f \quad (85)$$

Damit liegt es nahe die **dielektrische Verschiebung** \mathbf{D} zu definieren,

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (86)$$

wobei \mathbf{D} nur die freien Ladungen als Quellen hat

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f. \quad (87)$$

Aber **Vorsicht!** Es genügt i.A. nicht bei der Lösung eines Problems nur die freien Ladungsträger zu betrachten und \mathbf{D} analog den Methoden für \mathbf{E} auszurechnen, denn die Rotation von \mathbf{D} verschwindet nicht zwangsläufig

$$\nabla \times \mathbf{D} = \underbrace{\varepsilon_0 \nabla \times \mathbf{E}}_{=0} + \nabla \times \mathbf{P} = \nabla \times \mathbf{P} \quad (88)$$

d.h. \mathbf{D} lässt sich i.A. nicht als Gradient eines Skalarfeldes darstellen und damit

$$\mathbf{D} \neq \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \rho_f \quad (89)$$

Das ist auch intuitiv schlüssig, da zwar die freien Ladungen die eigentlichen Quellen des Feldes sind aber eben auch zusätzlich die Polarisationsladungen erzeugen. Letzterer Tatsache würde in (89) nicht Rechnung getragen.

Für bestimmte Geometrien, z.B. kugel-, zylindrisch- oder planar-symmetrische, in denen $\nabla \times \mathbf{P} = 0$ verschwindet, kann man natürlich \mathbf{D} vollständig aus den freien Ladungen bestimmen. Das gleiche gilt aber auch für einen völlig mit einem homogenen Dielektrikum gefüllten Raum, denn dort gilt ebenfalls $\nabla \times \mathbf{D} = 0$.

Betrachten wir nun auch noch die **Randbedingungen** für Dielektrika.

Die integrale Form von (87) ist

$$\int_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q_{f,enc} \quad (90)$$

Integriert man wiederum entlang eines kleinen geschlossenen Quaders um die Grenzfläche, das so klein ist, dass \mathbf{E} nicht variiert, und dessen Höhe $h \rightarrow 0$, dann erhält man

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} A = \sigma_f A \quad \rightarrow \quad D_{n,2} - D_{n,1} = \sigma_f \quad (91)$$

d.h. die Normalkomponente des \mathbf{D} -Feldes ist unstetig um den Betrag der freien Oberflächenladungsdichte.

Aus der integralen Form der zweiten Maxwellgleichung (M2) (verwende den Satz von

Stokes)

$$\int_{\gamma} \mathbf{E} \, dl = 0 \quad (92)$$

erhält man nach Integration entlang einer Schleife (mit $h \rightarrow 0$) durch beide Medien entlang der Grenzfläche

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \mathbf{t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}_{t,2} = \mathbf{E}_{t,1} \quad (93)$$

d.h. die Tangentialkomponente des \mathbf{E} -Feldes ist stetig.

Wir haben bisher noch nicht spezifiziert wie für ein konkretes *Materiemodell* die Polarisation $\mathbf{P} = \mathbf{P}[\mathbf{E}]$ tatsächlich aussieht. Das einfachste Modell ist das eines **linearen, isotropen Mediums**, d.h.

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \chi_{el} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \quad (94)$$

mit χ_{el} der dimensionslosen *elektrischen Suszeptibilität*. Für ein lineares (nicht-isotropes) Medium ist die elektrische Suszeptibilität i.A. eine tensorielle Größe.

Nicht-lineare Materialien - also solche für die es keinen rein linearen Zusammenhang zwischen \mathbf{P} und \mathbf{E} gibt (z.B. einen weiteren kubischen Term in (94)) - spielen inzwischen eine wichtige Rolle für moderne optische Anwendungen. Wir beschränken uns hier aber auf den Fall eines linearen, isotropen Mediums.

Mit (94) können wir sofort unsere dielektrische Verschiebung wie folgt umschreiben:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \underbrace{(1 + \chi_{el})}_{\equiv \varepsilon_r} \mathbf{E} \equiv \varepsilon \mathbf{E} \quad (95)$$

wobei ε_r die *relative Dielektrizitätskonstante* und ε die **Dielektrizitätskonstante** des Mediums ist.

Es liegt nahe zu vermuten, dass im Fall eines linearen, isotropen Mediums wegen dem einfachen linearen Zusammenhang zwischen \mathbf{D} und \mathbf{E} , \mathbf{D} vollständig gemäß (88) zu bestimmen ist. Dem ist jedoch **nicht** so. Betrachte dazu z.B. die Grenzfläche Medium/Vakuum: es ist $\mathbf{P} \equiv 0$ im Vakuum und $\mathbf{P} \neq 0$, dann gilt

$$\int \nabla \times \mathbf{P} \, d\mathbf{A} = \int_{\gamma} \mathbf{P} \, dl \neq 0 \quad (96)$$

und damit ist $\nabla \times \mathbf{P}$ nicht global gleich Null.

5.2 Statische magnetische Felder in Medien

Ähnlich dem elektrostatischen Fall müssen wir auch hier verschiedene Arten von Medien unterscheiden, z.B. diamagnetische, paramagnetische, ferromagnetische, anti-ferromagnetische etc. Medien. Den verschiedenen Medien Arten von Magnetismus ist gemein, dass sie durch bewegte Ladungen - mikroskopische Kreisströme $\langle \mathbf{j}_{micro} \rangle$ - entstehen; ihr Verhalten wird durch (M3) und (M4), also die ortsgemittelten mikroskopischen Maxwellgleichungen, bestimmt.

Der dominante Beitrag dieser Kreisströme wird durch das magnetische Dipolmoment \mathbf{m} charakterisiert und es genügt auch hier völlig analog zu 1.1 immer nur die durch $\langle \mathbf{j}_{micro} \rangle$ erzeugten 'physikalischen' Dipole zu betrachten.

Wir werden an dieser Stelle auf klassische Erklärungsmodelle für die verschiedenen Arten von Magnetismus verzichten, da diese zumeist sehr unbefriedigend sind, und verweisen auf die Festkörpervorlesung im kommenden Jahr für die quantenmechanischen Erklärungsmodelle (wer darauf nicht warten möchte findet auf <http://www.wmi.badw.de/teaching/Lecturenotes/> das Vorlesungsskript von Prof. Gross, einer Standardeinführung in die Festkörperphysik; Kapitel 12 behandelt Magnetismus).

Hier beschränken wir uns darauf mit den Ergebnissen der klassischen Theorien magnetische Materialien anhand ihrer Suszeptibilität zu charakterisieren.

Analog zur makroskopischen Polarisation eines Mediums definieren wir eine makroskopische Magnetisierung

$$\mathbf{M} = \frac{\langle \mathbf{m} \rangle}{V} \quad (97)$$

und berechnen ausgehend vom Feld eines magnetischen Dipols

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (98)$$

das Feld eines magnetisch polarisierten Mediums, wobei wiederum $\mathbf{m} = \mathbf{M} d^3x$ als mittleres Dipolmoment in jedem Volumenelement d^3x verstanden wird:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (99)$$

wir verwenden den gleichen 'Trick' wie in 1.1, benutzen die inverse Produktregel für das Kreuzprodukt $\mathbf{U} \times (\nabla f) = \nabla \times (f\mathbf{U}) - f(\nabla \times \mathbf{U})$ und

$$\int_V d^3x \nabla \times \mathbf{U} = - \int_{\partial V} \mathbf{U} \times d\mathbf{A}, \quad (100)$$

dann vereinfacht sich (99) zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial V} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times d\mathbf{A}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (101)$$

Den ersten Term identifiziert man analog zu 5.1 als das Feld einer Volumenstroms, den zweiten als das Feld eines Oberflächenstroms:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{j}_b}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial V} \frac{\mathbf{k}_b}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dA' \quad (102)$$

wobei

$$\mathbf{j}_b = \nabla \times \mathbf{M} \quad \mathbf{k}_b = \mathbf{M} \times \hat{n} \quad (103)$$

Wiederum sind \mathbf{j}_b und \mathbf{k}_b tatsächliche gebundene Ströme im Medium und nicht nur ein mathematisches Konstrukt (siehe dazu auch Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, S. 266-268).

Der Allgemeine Ansatz für die ortsgemittelte Stromdichte im Inneren eines Mediums ist damit:

$$\langle \dot{\mathbf{j}}_{micro} \rangle = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_b \quad (104)$$

wobei \mathbf{j}_f die externe freie Stromdichte und \mathbf{j}_b die oben berechnete Stromdichte der gebundenen Ströme ist.

Verwendet man diesen Ansatz in (M3), dann erhält man:

$$\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) = \langle \dot{\mathbf{j}}_{micro} \rangle = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_b = \mathbf{j}_f + \nabla \times \mathbf{M} \quad (105)$$

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j}_f \quad (106)$$

Man definiert nun das **H-Feld**,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (107)$$

wobei die Rotation von **H** alleine durch die freie Stromdichte charakterisiert wird

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f. \quad (108)$$

Aber auch hier **Vorsicht!** Es genügt i.A. wiederum nicht nicht bei der Lösung eines

Probleme nur die freie Stromdichte zu betrachten und \mathbf{H} analog zu \mathbf{B} zu berechnen, denn \mathbf{H} ist i.A. kein reines Rotationsfeld

$$\nabla \mathbf{H} = \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \nabla \mathbf{B}}_{=0} - \nabla \mathbf{M} = -\nabla \mathbf{M} \neq 0 \quad (109)$$

Die intuitive Erklärung ist hier wiederum, dass zwar die freien Ströme die Rotation des Feldes bestimmen aber eben auch zusätzlich die gebundenen Ströme im Medium erzeugen.

Wie schon im vorigen Kapitel betrachten wir noch die **Randbedingungen** für magnetische Medien.

Aus der integralen Form von (M4) (verwende den Satz von Gauss)

$$\int_{\partial V} \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0 \quad (110)$$

erhält man durch Integration entlang eines kleinen geschlossenen Quaders um die Grenzfläche, das so klein ist, dass \mathbf{B} nicht variiert, und dessen Höhe $h \rightarrow 0$, dann erhält man

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \mathbf{n} A = 0 \quad \rightarrow \quad B_{n,2} = B_{n,1} \quad (111)$$

d.h. die Normalkomponente des \mathbf{B} -Feldes ist stetig.

Die integrale Form von (108) ist (verwende den Satz von Stokes)

$$\int_{\gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{\partial V} \mathbf{j}_f d\mathbf{A}. \quad (112)$$

Integriert man nun entlang einer Schleife durch beide Medien (mit $h \rightarrow 0$), die senkrecht zu \mathbf{j}_f ist (damit bleibt nur der Beitrag der Oberflächenstromdichte), dann gilt

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \mathbf{t} = k_f \quad \Rightarrow \quad H_{t,2} - H_{t,1} = k_f \quad (113)$$

d.h. die Tangentialkomponente des \mathbf{H} -Feldes ist unstetig um den Betrag der Oberflächenstromdichte.

Wir müssen nun wieder ein konkretes *Materiemodell* für die Magnetisierung $\mathbf{M} = \mathbf{M}[\mathbf{H}]$ spezifizieren. Das einfachste Modell ist wiederum das eines **linearen, isotropen Mediums**, d.h.

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \chi_m \mathbf{H}(\mathbf{x}) \quad (114)$$

mit χ_m als dimensionsloser *magnetischer Suszeptibilität*.

Mit (114) können wir wiederum das \mathbf{B} -Feld wie folgt umschreiben:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_m)}_{\equiv \mu_r} \mathbf{H} \equiv \mu \mathbf{H} \quad (115)$$

wobei μ_r die *relative magnetische Permeabilität* und μ die **magnetische Permeabilität** ist.

Für $\chi_m > 0$ richtet sich die Magnetisierung parallel zum \mathbf{B} -Feld aus und man spricht von **paramagnetischen** Medien, dagegen richtet sich für $\chi_m < 0$ die Magnetisierung antiparallel aus und man erhält **diamagnetische** Medien. Der Extremfall eines Diamagneten ist $\chi_m = -1$, dann ist $\mathbf{B} \equiv 0$ im Inneren des Mediums.

Auch in linearen magnetischen Medien genügt (108) nicht um \mathbf{H} zu bestimmen. Dies liegt wiederum daran, dass an der Grenzfläche zwischen zwei Medien $\int \mathbf{M} d\mathbf{A} \neq 0$ und damit $\nabla \mathbf{M}$ nicht überall verschwindet.

5.3 Energie von Feldern in Materie

An dieser Stelle können wir nur die Energie von elektrischen Feldern in Materie herleiten, die formal korrekte Herleitung der magnetischen Felder erfordert das Induktionsgesetz und damit Elektrodynamik.

Der allgemeine Ausdruck für die Energie in einem elektrostatischen System im Vakuum ist

$$U_{el}(\mathbf{x}) = \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') V(\mathbf{x}') = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3x' E^2(\mathbf{x}') \quad (116)$$

Stellen wir uns vor, dass man Stück für Stück durch Einbringen von freier Ladung im Inneren eines Dielektrikums ein elektrisches Feld aufbaut. Zu Beginn ist die Feldenergie Null, die Änderung der freien Ladungsdichte $\rho_f \rightarrow \rho_f + \delta\rho_f$ im Dielektrikum erhöht dann stückweise die Feldenergie um

$$\delta U_{el}(\mathbf{x}) = \int d^3x' \delta\rho_f(\mathbf{x}') V(\mathbf{x}') \quad (117)$$

Für ein lineares Dielektrikum erhält man nach Manipulation der Ausdrücke in (117) und Integration über die infinitesimalen Änderungen

$$U_{el}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int d^3x' \mathbf{D}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}') \quad (118)$$

Die detaillierte Herleitung von (118) ist eine Teilaufgabe des dritten Übungsblattes.

6 Relativistik

experimentelle Beobachtung:

- Licht hat eine endliche Geschwindigkeit c (allgemeiner: endliche Wirkungsgeschwindigkeit).
- In jedem Inertialsystem (unbeschleunigtes Bezugssystem) gelten die Naturgesetze in gleicher Form.

Diese Postulate sind die Grundlage für die spezielle Relativitätstheorie.

Betrachte zwei Inertialsysteme IS und IS' mit den Koordinaten $x = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$ und $x' = \begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix}$. Die Relativgeschwindigkeit der beiden Inertialsysteme zueinander sei \mathbf{v} . Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich der Ursprung von IS' am Ursprung von IS , und es werde ein Lichtblitz ausgesendet. Nach dem Relativitätsprinzip breitet sich dieser Lichtblitz in beiden Inertialsystemen gleich schnell aus, und es muss daher gelten:

$$c^2 = \frac{\mathbf{x}^2}{dt^2} = \frac{\mathbf{x}'^2}{dt'^2} \Rightarrow c^2 dt^2 - \mathbf{x}^2 = c^2 dt'^2 - \mathbf{x}'^2$$

Dies definiert den Abstand im Minkowskiraum:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \mathbf{x}^2$$

Dieser Abstand hat in allen Inertialsystemen den gleichen Wert. Dabei gibt es drei verschiedene Kategorien von Abständen:

- lichtartig: $ds^2 = 0 \Rightarrow v = c$
- zeitartig: $ds^2 > 0 \Rightarrow v < c$
für solche Abstände kann ein mitbewegtes Inertialsystem definiert werden, d.h.: $d\mathbf{x}'^2 = 0$ und $dt' = d\tau = ds/c$ (Eigenzeit)
- raumartig: $ds^2 < 0 \Rightarrow v > c$
für solche Abstände kann kein mitbewegtes Inertialsystem definiert werden \rightarrow Ereignisse die durch einen raumartigen Abstand separiert sind können sich nicht gegenseitig beeinflussen (die Wechselwirkung/Information müsste sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten)

Nun interessieren wir uns dafür wie sich die Koordinaten unter einem Bezugssystemwechsel transformieren (Lorentztransformation). Die zugehörige Transformation ist linear, d.h. sie lässt sich als Matrix schreiben:

$$x' = \Lambda x$$

Die Invarianz des Abstandes impliziert:

$$s^2 = x^T g x = (\Lambda x)^T g (\Lambda x) = x^T (\Lambda^T g \Lambda) x = s'^2 \quad \text{mit} \quad g = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

$$\Rightarrow \Lambda^T g \Lambda = g \quad (119)$$

$$\Rightarrow |\det \lambda| = 1$$

Diese Gleichung hat die gleiche Gestalt wie diejenige für Drehungen im euklidischen Raum:

$$R^T 1 R = 1$$

für R z.B.:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dementsprechend erfüllt folgende Matrix Gleichung (119):

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\chi & -\sinh\chi & 0 & 0 \\ -\sinh\chi & \cosh\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (120)$$

Lorentztransformationen wie die in Gleichung (120), die die Zeit mit transformieren heißen Lorentzboosts. Die Einträge in dieser Matrix können durch die Geschwindigkeit ausgedrückt werden, mit der sich die entsprechenden Inertialsysteme zueinander bewegen:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (121)$$

mit

$$\gamma = \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\mathbf{v}}{c}$$

6.1 physikalische Interpretation und relativistische Effekte

6.1.1 Galileitransformation - Lorentztransformation

Betrachte zwei Inertialsysteme die sich mit der Geschwindigkeit v voneinander entfernen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf eine Raumdimension. Wir haben bereits gesehen wie sich die Koordinaten (ct, x) und (ct', x') der Inertialsysteme IS und IS' in der speziellen Relativitätstheorie ineinander transformieren. In der klassischen Version lautet die Transformation folgendermaßen:

- In jedem Inertialsystem vergeht die Zeit gleich, d.h. $t' = t$
- Die Ortskoordinaten x' und x sind um $t \cdot v$ verschoben, d.h. $x' = x - t \cdot v$

Diese (klassische) Transformation heißt Galilei-Transformation. In Matrix-Schreibweise lautet sie:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (122)$$

Der Unterschied zur Lorentztransformation ist also, dass $\gamma = 1$, d.h. $c = \infty$ und die Zeit nicht transformiert wird.

Als nächstes wollen wir uns die Gleichungen für die Koordinatenlinien (Achsen) des Inertialsystems IS' im Inertialsystem IS ansehen. Die Koordinatenlinie von t' ist definiert durch $x' = 0$ und die Koordinatenlinie von x' ist definiert durch $t' = 0$.

- Galilei-Transformation:
 t' -Linie: aus $x' = 0$ folgt $t = \frac{1}{v}x$, d.h. eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung $\frac{1}{v}$
 x' -Linie: aus $t' = 0$ folgt $t = 0$, d.h. eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung 0. In Abbildung 3 ist dies graphisch verdeutlicht.

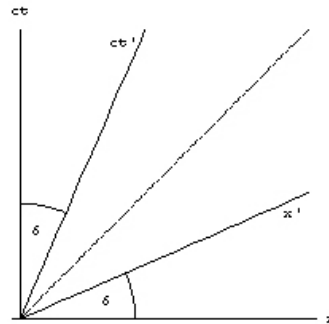
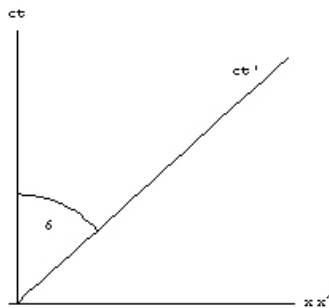


Abbildung 3: Achsen bei Galilei-Trafo Abbildung 4: Achsen bei Lorentz-Trafo

Da v in der klassischen Mechanik nicht beschränkt ist, kann man also zu jedem Punkt P in der Raumzeit ein Inertialsystem finden, so dass dieser Punkt auf der

t' -Linie liegt ($\Rightarrow x' = 0$, d.h. es gibt ein mitbewegtes Inertialsystem von 0 nach P, die Punkte 0 und P sind 'gleichortig').

- Lorentz-Transformation:

ct' -Linie: aus $x' = 0$ folgt $ct = \frac{1}{\beta}x$, d.h. eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung $\frac{1}{\beta}$

x' -Linie: aus $ct' = 0$ folgt $ct = \beta x$, d.h. eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung β .

Die beiden Koordinatenlinien sind also, wie in Abbildung 4 zu sehen ist symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden (da Steigungen invers zueinander). Die Winkelhalbierende wird Lichtkegel genannt, da hier $v = c$ gilt. In 2 Raumdimensionen wird der Begriff Kegel klarer (siehe Abbildung 5).

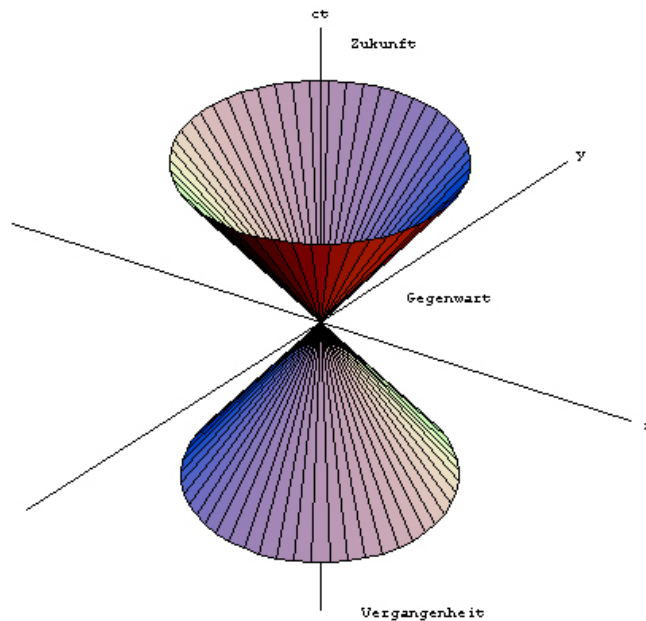


Abbildung 5: Lichtkegel in 2 Raumdimensionen

Da stets $\beta < 1$ gilt, kann die ct' -Linie nie außerhalb des Lichtkegels und die x' -Linie nie innerhalb des Lichtkegels liegen. Der Lichtkegel separiert die Raumzeit in drei Bereiche: Zukunft ($t > 0$ und innerhalb des Lichtkegels), Vergangenheit ($t < 0$ und innerhalb des Lichtkegels) und Gegenwart (außerhalb des Lichtkegels). Für jeden Punkt in der Vergangenheit und Zukunft lässt sich ein Inertialsystem finden, so dass dieser Punkt auf der ct' -Achse liegt ($\Rightarrow x' = 0$, die Punkte 0 und P sind 'gleichortig'). Für jeden Punkt in der Gegenwart lässt sich ein Inertialsystem finden, so dass dieser Punkt auf der x' -Achse liegt ($\Rightarrow t' = 0$, d.h. die Punkte 0 und P sind 'gleichzeitig', daher der Begriff Gegenwart).

6.1.2 Längenkontraktion, Zeitdilatation

- Längenkontraktion

Betrachte einen Maßstab der Länge l der in IS ruht. Wir interessieren uns jetzt für dessen Länge l' in IS'. Um die Länge l' zu bestimmen müssen wir in IS' gleichzeitig die Positionen der Enden des Maßstabes messen, d.h. $\delta t' = 0$ und $\delta x' = l'$. Wenn wir diesen Vektor zurücktransformieren, dann erhalten wir die Länge des Stabes in IS.

$$l = \left(\Lambda^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ l' \end{pmatrix} \right)^1 = \gamma l' \quad \Rightarrow \quad l' = \frac{1}{\gamma} l$$

D.h. für den bewegten Beobachter erscheint der Maßstab kleiner.

- Zeitdilatation

Betrachte den Invarianten Abstand $ds^2 = (cdt)^2 - dx^2$. Sei $ds^2 > 0$, dann lässt sich ein mitbewegtes Inertialsystem definieren. In diesem Inertialsystem gilt dann $ds^2 = (cd\tau)^2$, wobei τ die Eigenzeit des mitbewegten Inertialsystems ist. Zusammen ergibt sich:

$$(cd\tau)^2 = (cdt)^2 - dx^2 = (cdt)^2 \left(1 - \frac{dx^2}{(cdt)^2} \right) = (cdt)^2 (1 - \beta^2) = (cdt)^2 \frac{1}{\gamma^2}$$

$$dt = \gamma d\tau$$

'Bewegte Uhren gehen langsamer.'

6.1.3 relativistische Geschwindigkeits-Addition (in einer Raumdimension)

Betrachte 3 Inertialsysteme IS_1 , IS_2 und IS_3 , wobei sich IS_2 mit der Geschwindigkeit v_1 von IS_1 entfernt und IS_3 sich mit der Geschwindigkeit v_2 von IS_2 entfernt. Es stellt sich nun die Frage mit welcher Geschwindigkeit v sich IS_3 von IS_1 entfernt. Aufgrund der Gruppeneigenschaft der Lorentztransformation wissen wir, dass $\Lambda(v_1) \cdot \Lambda(v_2) = \Lambda(v)$. Verwenden wir die explizite Form der Lorentztransformation, so gilt:

$$\gamma(v) = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \left(\Lambda(v_1) \cdot \Lambda(v_2) \right)^1_1 \quad (123)$$

$$= \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) = \left(\frac{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}{(1 + \beta_1 \beta_2)^2} \right)^{-1/2} \quad (124)$$

$$= \left(1 - \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (125)$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{v}{c} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$$

6.2 Vierervektoren, kovariant und kontravariant

Kontravariante Vierervektoren (Indizes oben) transformieren sich wie:

$$a' = \Lambda a$$

Kovariante Vierervektoren (Dualvektoren, Indizes unten) transformieren sich wie:

$$b' = (\Lambda^{-1T})b = (g\Lambda g)b$$

Aus den kontravarianten Komponenten lassen sich durch den metrischen Tensor die dazugehörigen kovarianten Vektoren konstruieren und umgekehrt:

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu \quad x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu$$

mit

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Damit nimmt das Skalarprodukt im Minkowskiraum folgende Gestalt an:

$$s^2 = x^T g x = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = x_\mu x^\mu \equiv x \cdot x$$

Eine Liste kontravarianter Vektoren:

- Ort:

$$x = (x^\mu) = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

- Geschwindigkeit:

$$u = \frac{d}{d\tau}x = \gamma \frac{d}{dt}x = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad d\tau = \frac{1}{\gamma} dt$$

(da $d\tau$ lorentz-invariant ist)

- Impuls:

$$p = mu = \begin{pmatrix} m\gamma c \\ m\gamma \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$$

und es gilt (Energie-Impulsbeziehung):

$$p^2 = p_\mu p^\mu = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$$

- Strom:

$$j = \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{v}\rho \end{pmatrix}$$

da:

$$c\rho = cdt \frac{cdQ}{dx^4}$$

$$\mathbf{v}\rho = d\mathbf{x} \frac{dQ}{dt dV} = d\mathbf{x} \frac{cdQ}{dx^4}$$

und

$$dx'^4 = dx^4 |det\Lambda| = dx^4$$

- Potential:

$$A = \begin{pmatrix} \varphi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}$$

Der Vierergradient ist ein kovarianter Vektor:

$$\partial = (\partial_\mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ \nabla \end{pmatrix}$$

denn:

$$\partial_{\mu'} = (\partial_{\mu'} x^\mu) \partial_\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_{\mu'} \partial_\mu \Rightarrow \partial' = \Lambda^{-1T} \partial \quad \text{mit} \quad x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_{\mu'} x'^{\mu'}$$

6.3 Kovariante Form der Lorentzkraft

Die Lorentzkraft ist gegeben durch:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}), \quad \text{mit} \quad \mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v}$$

Aus der Energie-Impulsbeziehung folgt:

$$\frac{d}{dt} E = c^2 \frac{\mathbf{p}}{E} \cdot \dot{\mathbf{p}} \Rightarrow \frac{d}{dt} p^0 = \frac{d}{dt} E/c = q \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{E}$$

Und daraus folgt für die Ableitung nach der Eigenzeit τ :

$$\frac{d}{d\tau} p^0 = q\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}/c = q\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}/c \quad (126)$$

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{p} = q(\gamma c \mathbf{E}/c + \gamma \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = q(u^0 \mathbf{E}/c + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) \quad (127)$$

Zusammen ergibt sich für den Viererimpuls:

$$\frac{d}{d\tau} p = m \frac{d}{d\tau} u = qFu \quad (128)$$

bzw.

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = m \frac{d}{d\tau} u^\mu = qF^\mu_\nu u^\nu \quad (129)$$

mit

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (130)$$

Nun lässt sich die Frage wie sich die Felder unter Lorentztransformation verändern beantworten:

$$\begin{aligned} m \frac{d}{d\tau}(\Lambda u) &= \Lambda m \frac{d}{d\tau} u = \Lambda q F u = q(\Lambda F \Lambda^{-1})(\Lambda u) \\ &\Rightarrow F' = \Lambda F \Lambda^{-1} \end{aligned}$$

6.4 Kovariante Form der Maxwellgleichungen

Die Maxwellgleichungen:

Die vier homogenen Gleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (131)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \quad (132)$$

Die vier inhomogenen Gleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (133)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (134)$$

Die inhomogenen Maxwellgleichungen lassen sich auch mit Hilfe von F ausdrücken:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \begin{cases} \frac{1}{c} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} c \rho = \mu_0 j^0 & \text{für } \nu = 0 \\ (\nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E})^i = \mu_0 \mathbf{j}^i & \text{für } \nu = i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (135)$$

$$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad (136)$$

wobei

$$F^{\mu\nu} = F^\mu_\lambda g^{\lambda\nu} = (F \cdot g)^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \quad (137)$$

Die homogenen Maxwellgleichungen lassen sich mit dem zu F dualen Tensor \tilde{F} ausdrücken:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3/c & -E_2/c \\ B_2 & -E_3/c & 0 & E_1/c \\ B_3 & E_2/c & -E_1/c & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \quad (138)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{cases} -\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{für } \nu = 0 \\ -\frac{1}{c}(\partial_t \mathbf{B} + \nabla \wedge \mathbf{E})^i = 0 & \text{für } \nu = i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (139)$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (140)$$

6.5 Invarianten des elektromagnetischen Feldes

Aus F lassen sich die Invarianten des Feldes bezüglich Lorentztransformationen ableiten.

Es lässt sich zeigen dass es genau zwei Invarianten gibt, nämlich:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2) \quad (141)$$

und

$$\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{4}{c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \quad (142)$$

Die Invarianz von Gleichung (141) lässt sich leicht zeigen:

$$F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} = -\text{Tr}(F' \cdot F') = -\text{Tr}(\Lambda F \Lambda^{-1} \Lambda F \Lambda^{-1}) = -\text{Tr}(F \cdot F)$$

6.6 Potentiale und Eichinvarianz

Man kann für die Felder (6 Funktionen) Potentiale (4 Funktionen) einführen, so dass die homogenen Maxwellgleichungen automatisch erfüllt sind:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$$

Der Feldstärketensor nimmt dann folgende Gestalt an:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Die homogenen Maxwellgleichungen werden wie schon erwähnt automatisch erfüllt:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \partial_\mu \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \partial^\alpha A^\beta = 0$$

Die Bewegungsgleichungen für die Potentiale lauten dann:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial^\mu \partial^\nu A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu A^\mu = \square A^\nu - \partial^\nu \partial^\mu A^\mu$$

mit dem D'Alembert-Operator

$$\square = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2$$

Die Potentiale sind aber nicht eindeutig festgelegt, d.h. verschiedene Potentiale liefern den gleichen Feldstärketensor. Die physikalisch relevanten/messbaren Größen sind die Felder und nicht die Potentiale. Potentiale die die gleichen Felder liefern heißen äquivalent zueinander.

Im Folgenden wird gezeigt, dass die Potentiale A^μ und $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f$ für eine beliebige Funktion $f = f(ct, \mathbf{x})$ äquivalente zueinander sind:

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu + \partial^\mu \partial^\nu f - \partial^\nu \partial^\mu f = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}$$

Die Wahl dieses Freiheitsgrades in den Potentialen nennt man Eichung. Für bestimmte Eichungen vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen:

- Lorenzeichung: wählt man f so, dass gilt:

$$-\square f = \partial_\mu A^\mu \quad \text{und} \quad A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f$$

so gilt:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \square A^\nu + \partial^\nu \square f = \square A'^\nu = \mu_0 j^\nu$$

$$\Rightarrow \square A'^\nu = \mu_0 j \quad \text{und} \quad \partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \square f = 0$$

- Coulombbeziehung: wählt man f so, dass gilt:

$$\partial_i A^i = \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla^2 f \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{und} \quad A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f$$

so gilt:

$$\begin{aligned} \square A^0 - \partial^0 \partial_\mu A^\mu &= \square A^0 - \partial^0 (\partial_0 A^0 + \nabla \cdot \mathbf{A}) \\ &= -\nabla^2 A^0 - \partial^0 \nabla \cdot \mathbf{A} = -\nabla^2 A^0 - \partial^0 \nabla^2 f \\ &= -\nabla^2 (A^0 + \partial^0 f) = -\nabla^2 A'^0 = \mu_0 j^0 \end{aligned} \quad (143)$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 \varphi' = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{A}' = \partial_i A'^i = \partial_i A^i + \partial_i \partial^i f = \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 f = 0$$

7 Strahlung

7.1 Lösung der Inhomogenen Maxwellgleichungen

Wir wollen nun ausgehend von den Differentialgleichungen für die Potentiale elektromagnetische Strahlung untersuchen. Dazu Wählen wir die Lorenzeichung, d.h. $\partial_\mu A^\mu = 0$ und $\square A^\nu = \mu_0 j^\nu$. Wie man solche partiellen Differentialgleichungen löst wurde in der ersten Vorlesung besprochen: Die allgemeine Lösung setzt sich zusammen aus dem homogenen und dem inhomogenen Teil. Der homogene Teil entspricht elektromagnetischen Wellen (Wellenausbreitung im Vakuum). Die inhomogene Lösung erhält man aus der Faltung der Inhomogenität (hier $\mu_0 j^\nu$) mit der Greens-Funktion $G(ct, \mathbf{x})$ (Fundamentallösung). Die Greens-Funktion muss folgende Gleichung erfüllen.

$$\square G(ct, \mathbf{x}) = \delta^{(4)}(ct, \mathbf{x})$$

Im Folgenden interessieren wir uns bloß für die inhomogene Lösung. Fordert man, dass die Lösung der Kausalität d.h. dem Ursache-Wirkungs-Prinzip genügt, so nimmt die Greens-Funktion folgende Gestalt an:

$$G(ct, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(|\mathbf{x}| - ct)$$

Falten wir jetzt die Greens-Funktion mit der Inhomogenität, so erhalten wir folgende Lösung:

$$A^\nu(ct, \mathbf{x}) = (G * \mu_0 j^\nu)(ct, \mathbf{x}) \quad (144)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^4 x' \frac{j^\nu(ct', \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - c(t - t')) \quad (145)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 x' \frac{j^\nu(ct - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (146)$$

wobei die Faltung zweier Funktionen definiert ist als:

$$(f * g)(x) = \int dx' f(x - x')g(x')$$

7.2 periodische Ströme, Fernfeldnäherung, Dipolnäherung

Wir wollen nun explizit das Strahlungsfeld berechnen. Dazu nehmen wir periodische Ströme an und betrachten nur das asymptotische Verhalten des Feldes für große Entfernungen ($|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$ für $\mathbf{x}' \in \text{supp}(j^\mu)$, 'Fernfeldnäherung'):

$$j^\mu(ct, \mathbf{x}) = j^\mu(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = (r^2 + r'^2 - 2\mathbf{x}\mathbf{x}')^{1/2} = r - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{x}' + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Im Nenner nähern wir $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r$. Daraus ergibt sich mit $k = \frac{\omega}{c}$ und $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_r$:

$$A^\mu = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{j^\mu(\mathbf{x}') e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{-i\omega t} \quad (147)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{j^\mu(\mathbf{x}') e^{ik(r-\mathbf{e}_r\mathbf{x}')}}{r} e^{-i\omega t} \quad (148)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \int d^3x' j^\mu(\mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}'} \quad (149)$$

Desweiteren nehmen wir an, dass die Wellenlänge der emittierten Strahlung viel größer ist als die Abmessungen der Strahlungsquelle ($kr' \ll 1$ für $\mathbf{x}' \in \text{supp}(j^\mu)$), so dass wir die Exponentialfunktion entwickeln können:

$$e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}'} = 1 - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' + \mathcal{O}((kr')^2)$$

Für ϕ folgt dann mit $Q = \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') = 0$ und $\mathbf{p} = \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}'$:

$$\phi_{E1} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') (1 - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}') = -i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$$

ϕ enthält keinen Beitrag der proportional zum magnetischen Dipolmoment m ist, daher:

$$\phi_{M1} = 0$$

Für \mathbf{A} entstehen mehrere Beiträge. Um diese Beiträge durch Dipolmomente auszudrücken brauchen wir folgende Identitäten:

$$\int d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') = - \int d^3x' \mathbf{x}' \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}') = -i\omega \int d^3x' \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') = -i\omega \mathbf{p} \quad (150)$$

$$\int d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' = -\mathbf{k} \wedge \frac{1}{2} \int d^3x' \mathbf{x}' \wedge \mathbf{j}(\mathbf{x}') - i\omega \frac{1}{2} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' \quad (151)$$

Den zweiten Term in Gleichung 151 vernachlässigen wir (Quadrupolstrahlung). Benutzt man $\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3x' \mathbf{x}' \wedge \mathbf{j}(\mathbf{x}')$ so ergibt sich für \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}_{E1} + \mathbf{A}_{M1} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} (-i\omega \mathbf{p} + i\mathbf{k} \wedge \mathbf{m})$$

Für das elektrische und magnetische Feld folgt schließlich:

- elektrische Dipolstrahlung (bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\frac{1}{r})$):

$$\mathbf{B}_{E1} = \nabla \wedge \mathbf{A}_{E1} \quad (152)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} k^2 \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{p} \quad (153)$$

$$\mathbf{E}_{E1} = -\nabla \phi_{E1} - \partial_t \mathbf{A}_{E1} \quad (154)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} k^2 \mathbf{e}_r \wedge (\mathbf{p} \wedge \mathbf{e}_r) \quad (155)$$

- magnetische Dipolstrahlung (bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\frac{1}{r})$):

$$\mathbf{B}_{M1} = \nabla \wedge \mathbf{A}_{M1} \quad (156)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} k^2 \mathbf{e}_r \wedge (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_r) \quad (157)$$

$$\mathbf{E}_{M1} = -\partial_t \mathbf{A}_{M1} \quad (158)$$

$$= -\frac{c\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} k^2 \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{m} \quad (159)$$