Matthias Danner, Timon Mehrling , Korbinian Münster, Karsten Donnay **Musterlösung**

Übungsklausur Ferienkurs Elektrodynamik - SS 2008

Freitag, 08.08.2008

1 Multiple Choice

(a) Mit welcher Potenz des Abstandes r fällt der Betrag des elektrischen Feldes einer Punktladung im 3D-Raum ab?

☐ $E \propto \frac{1}{r}$
☒ $E \propto \frac{1}{r^2}$
☐ $E \propto \frac{1}{r^3}$
☐ $E \propto \frac{1}{r^5}$

(b) Welche dieser Gleichungen ist keine Maxwellgleichung bzw. ist nicht mit den Maxwellgleichungen verträglich?

☐ $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{\epsilon_0}\,\rho(\vec{r},t)\,;$
☐ $\nabla \times \vec{B}(\vec{r},t) - \epsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} = \mu_0\,\vec{j}(\vec{r},t);$
☐ $\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0\,;$
☒ $\nabla \times \vec{E}(\vec{r},t) + \frac{\partial B(\vec{r},t)}{\partial t} = \mu_0\,\vec{j}(\vec{r},t)$

(c) Auf welchen materialspezifischen Größen basiert die Maxwelltheorie in Medien?

☐ ρ und $\boldsymbol{j}$
☐ ρ_{micro} und $\boldsymbol{j}_{micro}$
☒ $< \rho_{micro} >$ und $< \boldsymbol{j}_{micro} >$
☐ keine der oben genannten

(d) Welche der folgenden Aussagen über Felder an Grenzflächen von Medien sind richtig?

☐ Die Tangentialkomponente des $\boldsymbol{D}$-Feldes und die Normalkomponente des **E**-Feldes sind stetig.
☒ Die Normalkomponente des $\boldsymbol{D}$-Feldes ist unstetig und die Tangentialkomponente des **E**-Feldes ist stetig.
☒ Falls σ_f=0, dann ist die Normalkomponente des $\boldsymbol{D}$-Feldes und die Tangentialkomponente des **E**-Feldes stetig.
☐ Die Tangentialkomponente des $\boldsymbol{B}$-Feldes ist stetig.

(e) Betrachten Sie 3 Inertialsysteme IS_1, IS_2und IS_3, wobei sich IS_2 mit der Geschwindigkeit v_1 von IS_1 entfernt und IS_3 sich mit der Geschwindigkeit v_2 von IS_2 entfernt. Mit welcher Geschwindigkeit v entfernt sich IS_3 von IS_1 ($\beta = \frac{v}{c}$)?

☐ $\beta = \frac{c\beta_1\beta_2}{c+\beta_1+\beta_2}$
☒ $\beta = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$
☐ $\beta = c\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$
☐ $\beta = \frac{c+\beta_1+\beta_2}{c^2+\beta_1\beta_2}$

(f) Welche Ausdrücke sind invariant unter Lorentztransformationen?

☒ $\partial_\mu A^\mu$
☐ $\partial_\nu A^\mu$
☒ $\omega t - \mathbf{kx}$
☒ $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j}$
☒ $\partial_\sigma A^\mu j_\mu F^{\nu\sigma} x_\nu$

(g) Gegeben sei der Vierervektor $x = (5, 3, 0, 0)^T a$ ($a \neq 0$). Durch welche Lorentztransformation Λ lässt sich x auf die Gestalt $\Lambda x = (0, 4, 0, 0)^T$ bringen? (Tip: Berechnen Sie x^2!)

☐ $\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

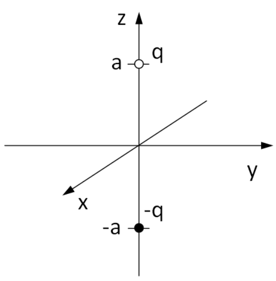
☐ $\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 Punktladungen

Gegeben seien zwei Punktladungen $q_1 = q$ und $q_2 = -q$, die sich an den Orten $\vec{r}_1 = a\,\hat{e}_z$ und $\vec{r}_2 = -a\,\hat{e}_z$ befinden (siehe Abbildung).



(a) Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ an.

(b) Berechnen Sie das Elektrostatische Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r'})}{|\,\vec{r} - \vec{r}\,'\,|}$$

(c) Bestimmen Sie hieraus das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$.

(d) Führen Sie eine Multipolentwicklung bis zum ersten nicht verschwindenden Moment durch. Geben Sie dieses Moment explizit an. Welches Potential ergibt sich hieraus in großen Entfernungen $r \gg a$?

(e) Betrachten Sie den Limes $a \to 0$ bei gleichzeitiger Konstanz des Produktes $q\,a = p/2$. Berechnen Sie für diesen Grenzfall das Potential für $r \neq 0$.

(f) Den unter (e) betrachteten Grenzfall bezeichnet man als „mathematischen Dipol“ oder „idealen Dipol“. Zeigen Sie, dass sich aus dem Potential $\Phi(\vec{r}) = 1/4\pi\epsilon_0 \cdot \vec{p} \cdot \vec{r}/r^3$ für die Ladungsverteilung des mathematischen Dipols ergibt:

$$\rho_{dip}(\vec{r}) = -p\,\frac{\partial}{\partial z}\delta(\vec{r}) \tag{1}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Laplacegleichung und die Tatsache, dass $\Delta(-\frac{1}{4\pi\,r}) = \delta(\boldsymbol{x})$.

(g) Berechnen Sie Kraft

$$\vec{F}_D = \int d^3r'\rho_{dip}(\vec{r}\,')\,\vec{E}(\vec{r}\,') \tag{2}$$

die ein äußeres elektrisches Feld auf einen allgemeinen ($\rho_{dip}(\vec{r}) = -\vec{p}\cdot\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$) mathematischen Dipol ausübt, der sich am Ort $\vec{r}_0$ befindet.
Hinweis: Führen Sie eine partielle Integration durch und benutzen Sie folgende Identität:
$\nabla(a\cdot b) = (b\cdot\nabla)a + (a\cdot\nabla)b + b\times(\nabla\times a) + a\times(\nabla\times b)$.

Lösungsvorschlag

(a) Die Ladungsdichte ist gegeben durch:

$$\rho(\vec{r}) = q\,\delta(x)\,\delta(y)\,\left[\delta(z-a) - \delta(z+a)\right] \tag{3}$$

(b) Wir setzen die Ladungsdichte ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r'})}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|} && (4)\\
&= \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\delta(x')\,\delta(y')\,\left[\delta(z'-a)-\delta(z'+a)\right]}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|} && (5)\\
&= \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\,\vec{r}-\vec{r}_1\,|} - \frac{1}{|\,\vec{r}-\vec{r}_2\,|}\right) && (6)
\end{aligned}$$

(c) Das elektrische Feld erhält man mit:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla\Phi(\vec{r}) && (7)\\
&= -\frac{q}{4\pi\,\epsilon_0}\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right) && (8)\\
&= \frac{q}{4\pi\,\epsilon_0}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\right)\,. && (9)
\end{aligned}$$

(d) Man erhält für die Multipolmomente:

$$\begin{aligned}
Q &= \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,') = 0 && (10)\\
p_x &= p_y = 0 && (11)\\
p_z &= \int d^3r'\,z'\,\rho(\vec{r}\,') = q\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz'\,z'\,\left[\delta(z-a)-\delta(z+a)\right] = 2\,a\,q && (12)\\
\Rightarrow\ \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{|\vec{r}|^3} = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{\vec{r}\cdot p\hat{e}_z}{|\vec{r}|^3} = \frac{z}{|\vec{r}|^3}\,\frac{2\,a\,q}{4\pi\,\epsilon_0}\quad (r\gg a)\,. && (13)
\end{aligned}$$

(e) Für den Limes ergibt sich:

$$\lim_{a\to 0,\, q\to\infty} \Phi(\vec{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,\frac{p\hat{e}_z\cdot\vec{r}}{r^3}\,. \tag{14}$$

(f) Wir modifizieren zunächst den Ausdruck für Φ:

$$\Phi(\vec{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,p\hat{e}_z\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,p\hat{e}_z\cdot\nabla\frac{1}{r}\,. \tag{15}$$

Die Laplace-Gleichung ist gegeben durch:

$$\Delta\Phi(\vec{r}) \;=\; -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r})\,. \tag{16}$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\epsilon_0}\rho_{dip}(\vec{r}) &= \Delta\Phi(\vec{r} = -\Delta\left(\frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,p\hat{e}_z\cdot\nabla\frac{1}{r}\right) && (17)\\
&= -\frac{1}{4\pi\,\epsilon_0}\,p\,\hat{e}_z\cdot\nabla\left(\Delta\frac{1}{r}\right) && (18)\\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\,p\hat{e}_z\cdot\nabla\delta(\vec{r}) && (19)\\
&= \frac{p}{\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\delta(\vec{r}) && (20)\\
\Rightarrow\ \rho_{dip}(\vec{r}) &= -p\,\frac{\partial}{\partial z}\delta(\vec{r}) && (21)
\end{aligned}$$

(g) Für die Kraft, die auf einen mathematischen Dipol wirkt, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_D &= \int d^3r'\,\vec{E}(\vec{r}\,')\rho_{dip}(\vec{r}\,') && (22)\\
&= -\int d^3r'\,\vec{E}(\vec{r}\,')\,\left[(\vec{p}\cdot\nabla')\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)\right] && (23)\\
&= -\left[(\vec{p}\cdot\nabla')\int d^3r'\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)\,\vec{E}(\vec{r}\,') - \int d^3r'\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)\,\left[(\vec{p}\cdot\nabla')\,\vec{E}(\vec{r}\,')\right]\right] && (24)\\
&= -\underbrace{(\vec{p}\cdot\nabla')\,\vec{E}(\vec{r}_0)}_{=0} + \int d^3r'\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)\,\left[(\vec{p}\cdot\nabla')\,\vec{E}(\vec{r}\,')\right] && (25)\\
&= (\vec{p}\cdot\nabla)\,\vec{E}(\vec{r}_0) && (26)\\
& && (27)
\end{aligned}$$

Mit obiger Vektoridentität erhalten wir schließlich($\nabla\times E = 0$ in der Elektrostatik):

$$\begin{aligned}
\vec{F}_D &= (\vec{p}\cdot\nabla)\,\vec{E}(\vec{r}_0) && (28)\\
&= \nabla\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right) - \underbrace{(\vec{p}\cdot\nabla)\,\vec{E}}_{=0} - \underbrace{\vec{p}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)}_{=0} - \underbrace{\vec{E}\times(\nabla\times\vec{p})}_{=0} && (29)\\
&= \nabla\left(\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r}_0)\right)\,. && (30)
\end{aligned}$$

3 Magnetisierter Zylinder

Ein unendlich langer Zylinder (Radius R), habe eine intrinsische Magnetisierung entlang der Zylinderachse

$$\boldsymbol{M} = k\,s\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{31}$$

wobei k eine Konstante und s der Abstand zur Achse ist. Es gibt keine freien Ströme.

(a) Berechnen Sie alle gebundenen Ströme und das von ihnen erzeugte magnetische Feld.

(b) Verwenden Sie das Ampersche Gesetz um $\boldsymbol{H}$ zu berechnen. Bestätigen Sie damit das Ergebnis aus (a).

Lösungsvorschlag

Entsprechend der Definition von $\boldsymbol{M}$ ist die z-Achse entlang der Zylinderachse orientiert. Sei weiterhin $\hat{\boldsymbol{e}}_s$ der radiale Einheitsvektor und $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ der polare Einheitsvektor.

(a) Wir können die Volumenstromdichte und die Oberflächenstromdichte direkt berechnen:

$$\boldsymbol{j}_b = \nabla \times \boldsymbol{M} = -k\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \tag{32}$$

und

$$\boldsymbol{k}_b = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n} = k\,R\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \times \hat{\boldsymbol{e}}_s = k\,R\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \tag{33}$$

Die gebundenen Ströme fließen in (positiver und negativer) $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$-Richtung, damit kann das resultierende **B**-Feld nach der 'rechte-Hand-Regel' nur in $\hat{\boldsymbol{e}}_z$-Richtung zeigen.

Den Betrag des **B**-Feldes außerhalb des Zylinders erhalten wir durch Integration entlang einer Amperschen Schleife, die vollständig außerhalb des Zylinders liegt:

$$\int \mathbf{B}\,d\boldsymbol{l} = [B(a) - B(b)]\,l = \mu_0\,I_{enc} = 0 \tag{34}$$

$$\Rightarrow \quad B(a) = B(b) \tag{35}$$

wobei $a, b > R$ zwei beliebige Abstände von der Zylinderachse sind. Das Feld muss jedoch für große Abstände s verschwinden, also muss das Feld wegen (5) überall außerhalb des Zylinders verschwinden!

Um das Feld im Inneren des Zylinders zu berechnen integrieren wir entlang einer Amperschen Schleife (Seitenlänge l) um die Grenzfläche, die senkrecht zu den gebunden Strömen steht. Das **B**-Feld ist nur ungleich Null im Inneren und so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \mathbf{B}\,d\boldsymbol{l} = B\,l = \mu_0\,I_{enc} = \mu_0\,(\int \boldsymbol{j}_b\,d\boldsymbol{A} + \int k_b\,dl_\perp) = \mu_0\,(\int (-k)\,dA + k\,R\,l) \\ = \mu_0\,(-k\,(R-s)\,l + k\,R\,l) = \mu_0\,k\,l\,s\end{aligned} \tag{36}$$

und damit

$$\mathbf{B} = \mu_0\,k\,s\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{37}$$

(b) Aus der Symmetrie des Problems folgt wie zuvor, dass $\boldsymbol{H}$ in $\hat{\boldsymbol{e}}_z$-Richtung zeigt. Integration entlang einer Amperschen Schleife der Seitenlänge l um die Grenzfläche ergibt, da es keine freien Ströme gibt

$$\int \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = H\,l = I_{f,enc} = 0 \tag{38}$$

und damit $\boldsymbol{H} = 0$ und folglich gilt außerhalb des Zylinders wegen $\boldsymbol{M} = 0$ auch $\mathbf{B} = 0$ und im Inneren

$$\mathbf{B} = \mu_0\,\boldsymbol{M} = \mu_0\,k\,s\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{39}$$

4 Oszillierende Punktladung

Eine Punktladung Q oszilliert harmonisch um eine im Koordinatenursprung ruhende Punktladung $-Q$. Q bewegt sich dabei mit der konstanten Frequenz ω auf einem entlang der z-Achse ausgerichteten Stab der Länge $2a$, dessen Schwerpunkt im Koordinatenursprung ruht. Damit beschreibt Q folgende Bahnkurve:

$$\mathbf{R}(t) = a\mathbf{e}_z \cos\omega t$$

Näherungsweise lässt sich das Vektorpotential schreiben als:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int d^3x' \mathbf{j}\big(t - \frac{r}{c}, \mathbf{x}'\big)$$

(a) Bestimmen Sie die Ladungsdichte ρ und die Stromdichte $\mathbf{j}$.

(b) Berechnen Sie aus der oben gegebenen Näherungsformel das Vektorpotential.

(c) Berechnen Sie das elektrische und magnetische Feld bis einschließlich zur Ordnung $\frac{1}{r}$.

Hinweis: Sie brauchen nur $\cos(\omega t - kr)$ bzw. $\sin(\omega t - kr)$ abzuleiten. Die anderen ortsabhängigen Terme $\frac{1}{r}$ und $\mathbf{e_r} \wedge \mathbf{e}_z$ liefern Beiträge zur Ordnung $\frac{1}{r^2}$ und sollen hier vernachlässigt werden. Außerdem betrachten wir das Feld nur außerhalb der Strom- und Ladungsverteilung, so dass gilt $\nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t \mathbf{E} = 0$. Nützlich kann auch die Formel $\nabla \wedge \big(f\mathbf{F}\big) = f(\nabla \wedge \mathbf{F}) + (\nabla f) \wedge \mathbf{F}$ sein.

Lösungsvorschlag

(a)

$$\rho(\mathbf{x}) = Q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}(t)) - Q\delta(\mathbf{x})$$
$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \partial_t \mathbf{R}(t) Q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}(t))$$

Da die Ladung $-Q$ ruht, trägt sie nicht zum Strom bei.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int d^3x' \partial_t \mathbf{R}\big(t - \frac{r}{c}\big) Q\, \delta\bigg(\mathbf{x} - \mathbf{R}\big(t - \frac{r}{c}\big)\bigg) && (40)\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q}{r}\partial_t \mathbf{R}\big(t - \frac{r}{c}\big) && (41)\\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Qa}{r}\omega \sin\big(\omega t - kr\big)\mathbf{e}_z && (42)
\end{aligned}$$

mit $k = \frac{\omega}{c}$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \nabla \wedge \mathbf{A} && (43)\\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Qa}{r}\omega\, \nabla \sin\big(\omega t - kr\big) \wedge \mathbf{e}_z + \mathcal{O}\big(\frac{1}{r^2}\big) && (44)\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Qa\omega^2}{rc}\cos\big(\omega t - kr\big)\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_z + \mathcal{O}\big(\frac{1}{r^2}\big) && (45)\\
&= \frac{c\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}Qak^2 \cos\big(\omega t - kr\big)\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_z + \mathcal{O}\big(\frac{1}{r^2}\big) && (46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{E} &= c^2 \nabla \wedge \mathbf{B} && (47)\\
&= \frac{c^3\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}Qak^2\, \nabla \cos\big(\omega t - kr\big) \wedge (\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_z) + \mathcal{O}\big(\frac{1}{r^2}\big) && (48)\\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}Qak^2\, ck\sin\big(\omega t - kr\big)\mathbf{e}_r \wedge (\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_z) + \mathcal{O}\big(\frac{1}{r^2}\big) && (49)\\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}Qak^2\, (-\omega)\sin\big(\omega t - kr\big)\mathbf{e}_r \wedge (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_r) + \mathcal{O}\big(\frac{1}{r^2}\big) && (50)
\end{aligned}$$

Daraus folgt durch Integrieren:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}Qak^2\cos\bigl(\omega t - kr\bigr)\mathbf{e}_r \wedge (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_r) + \mathcal{O}\bigl(\frac{1}{r^2}\bigr)$$

5 Ebene elektromagnetische Welle

Betrachten Sie eine ebene elektromagnetische Welle im Vakuum, gegeben durch

$$\mathbf{E}(ct, \mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{B}(ct, \mathbf{x}) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}$$

wobei $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ komplexe Größen sein können. Außerdem gilt $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$.

(a) Zeigen Sie, dass die angegebenen Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ Lösungen der homogenen Wellengleichung ($\Box\,\mathbf{E} = \Box\,\mathbf{B} = 0$) sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Welle transversal ist, d.h. $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{E} = 0$.

(c) Berechnen Sie die zeitlich gemittelte Energiedichte $u = \frac{1}{2}\overline{\bigl(\epsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0}\bigr)}$ sowie den zeitlich gemittelten Poynting-Vektor $\mathbf{s} = \frac{1}{\mu_0}\overline{\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}}$ der elektromagnetischen Welle. Schreiben Sie die Ergebnisse als Funktion von $\mathbf{E}_0$.

Lösungsvorschlag

(a) Zuerst schreiben wir mit $k_0 = \frac{\omega}{c}$ das Argument der Exponentialfunktion um:

$$\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = k_\mu x^\mu$$

Also gilt mit $k^2 = c^2m^2 = 0$:

$$\Box\,\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\partial_\mu\partial^\mu e^{-ik_\mu x^\mu} = -\mathbf{E}_0 k_\mu k^\mu e^{-ik_\mu x^\mu} = 0$$

Für $\mathbf{B}$ ist die Rechnung analog durchzuführen.

(b) Dazu brauchen wir die Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, &\quad \nabla\wedge\mathbf{E} + \partial_t\mathbf{B} = 0 \\ \nabla\cdot\mathbf{E} = 0, &\quad \nabla\wedge\mathbf{B} - \tfrac{1}{c^2}\partial_t\mathbf{E} = 0 \end{aligned}$$

Setzt man die gegebenen Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ ein, so nehmen die Maxwellgleichungen folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} i\mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0, &\quad i\mathbf{k}\wedge\mathbf{E} - i\omega\mathbf{B} = 0 \\ i\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0, &\quad i\mathbf{k}\wedge\mathbf{B} + \tfrac{1}{c^2}i\omega\mathbf{E} = 0 \end{aligned}$$

Also:

$$\mathbf{k}\wedge\mathbf{E} = \omega\mathbf{B}$$

$$\mathbf{E}\wedge\mathbf{B} = \mathbf{E}\wedge\frac{1}{\omega}(\mathbf{k}\wedge\mathbf{E}) = \frac{\mathbf{E}^2}{\omega}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B}\wedge\mathbf{k} = \frac{\omega}{c^2}\mathbf{E}$$

Die Vektoren $(\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$ stehen also senkrecht aufeinander und bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

(c) Als erstes wollen wir uns ansehen welchen Wert $\overline{\mathbf{E}^2}$ hat. Dabei ist zu beachten, dass die Felder immer reel sind. Man muss sich bei der Notation $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$ also immer daran erinnern, dass die rechte Seite eigentlich nur gilt, wenn man den Realteil davon nimmt. Solange man nur Linearkombinationen von Feldern betrachtet, macht es keinen Unterschied ob man am Anfang der Rechnung den Realteil der Felder nimmt oder am Schluss der Rechnung den Realteil des Ergebnises. Sobald man aber die Felder miteinander multipliziert macht das schon einen Unterschied! Daher:

$$\overline{\mathbf{E}^2} = \frac{1}{T}\int_0^T dt\left(\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}\right)\right)^2 \tag{51}$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T dt\left((\mathrm{Re}\mathbf{E}_0)\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t) - (\mathrm{Im}\mathbf{E}_0)\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)\right)^2 \tag{52}$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T dt\left((\mathrm{Re}\mathbf{E}_0)^2\cos^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t) + (\mathrm{Im}\mathbf{E}_0)^2\sin^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)\right) \tag{53}$$

$$= \frac{1}{2}\left((\mathrm{Re}\mathbf{E}_0)^2 + (\mathrm{Im}\mathbf{E}_0)^2\right) = \frac{1}{2}\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E}_0 \tag{54}$$

Damit ergibt sich für $\overline{\mathbf{s}}$:

$$\overline{\mathbf{s}} = \frac{1}{\mu_0}\overline{\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\overline{\mathbf{E}^2}}{\omega}\mathbf{k} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\mathbf{E}_0^*\cdot\mathbf{E}_0}{2\omega}\mathbf{k}$$

Für $\overline{u}$ ergibt sich mit $\mathbf{k}\wedge\mathbf{E} = \omega\mathbf{B} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{k}^2\mathbf{E}^2 = \omega^2\mathbf{B}^2 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{B}^2 = \frac{1}{c^2}\mathbf{E}^2$:

$$u = \frac{1}{2}\overline{\left(\epsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0}\right)} = \frac{1}{2}\overline{\left(\epsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{E}^2}{c^2\mu_0}\right)} = \frac{1}{2}\overline{(2\epsilon_0\mathbf{E}^2)} = \frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}_0^*\cdot\mathbf{E}_0$$