Matthias Danner, Timon Mehrling , Korbinian Münster, Karsten Donnay

Übungsklausur Ferienkurs Elektrodynamik - SS 2008

Freitag, 08.08.2008

Diese Klausur ist als Teil eurer Prüfungsvorbereitung gedacht. Wir werden euch daher statt einer Vorlesung am Freitag die Gelegenheit geben, diese Klausur unter Prüfungsbedingungen zu rechnen. Die Musterlösung wird anschließend in den Übungen besprochen.

1 Multiple Choice

(a) Mit welcher Potenz des Abstandes r fällt der Betrag des elektrischen Feldes einer Punktladung im 3D-Raum ab?

- ☐ $E \propto \frac{1}{r}$
- ☐ $E \propto \frac{1}{r^2}$
- ☐ $E \propto \frac{1}{r^3}$
- ☐ $E \propto \frac{1}{r^5}$

(b) Welche dieser Gleichungen ist keine Maxwellgleichung bzw. ist nicht mit den Maxwellgleichungen verträglich?

- ☐ $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{\epsilon_0}\,\rho(\vec{r},t)\,;$
- ☐ $\nabla \times \vec{B}(\vec{r},t) - \epsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} = \mu_0\,\vec{j}(\vec{r},t);$
- ☐ $\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0\,;$
- ☐ $\nabla \times \vec{E}(\vec{r},t) + \frac{\partial B(\vec{r},t)}{\partial t} = \mu_0\,\vec{j}(\vec{r},t)$

(c) Auf welchen materialspezifischen Größen basiert die Maxwelltheorie in Medien?

- ☐ ρ und $\boldsymbol{j}$
- ☐ ρ_{micro} und $\boldsymbol{j}_{micro}$
- ☐ $< \rho_{micro} >$ und $< \boldsymbol{j}_{micro} >$
- ☐ keine der oben genannten

(d) Welche der folgenden Aussagen über Felder an Grenzflächen von Medien sind richtig?

- ☐ Die Tangentialkomponente des $\boldsymbol{D}$-Feldes und die Normalkomponente des **E**-Feldes sind stetig.
- ☐ Die Normalkomponente des $\boldsymbol{D}$-Feldes ist unstetig und die Tangentialkomponente des **E**-Feldes ist stetig.
- ☐ Falls σ_f=0, dann ist die Normalkomponente des $\boldsymbol{D}$-Feldes und die Tangentialkomponente des **E**-Feldes stetig.
- ☐ Die Tangentialkomponente des $\boldsymbol{B}$-Feldes ist stetig.

(e) Betrachten Sie 3 Inertialsysteme IS_1, IS_2und IS_3, wobei sich IS_2 mit der Geschwindigkeit v_1 von IS_1 entfernt und IS_3 sich mit der Geschwindigkeit v_2 von IS_2 entfernt. Mit welcher Geschwindigkeit v entfernt sich IS_3 von IS_1 ($\beta = \frac{v}{c}$)?

- ☐ $\beta = \frac{c\beta_1\beta_2}{c+\beta_1+\beta_2}$
- ☐ $\beta = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$
- ☐ $\beta = c\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$

☐ $\beta = \frac{c+\beta_1+\beta_2}{c^2+\beta_1\beta_2}$

(f) Welche Ausdrücke sind invariant unter Lorentztransformationen?

☐ $\partial_\mu A^\mu$

☐ $\partial_\nu A^\mu$

☐ $\omega t - \mathbf{kx}$

☐ $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j}$

☐ $\partial_\sigma A^\mu j_\mu F^{\nu\sigma} x_\nu$

(g) Gegeben sei der Vierervektor $x = (5, 3, 0, 0)^T a$ ($a \neq 0$). Durch welche Lorentztransformation Λ lässt sich x auf die Gestalt $\Lambda x = (0, 4, 0, 0)^T$ bringen? (Tip: Berechnen Sie x^2!)

☐ $\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

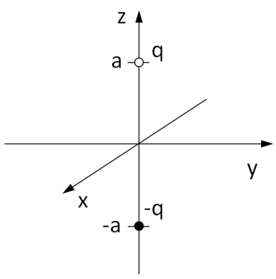
☐ $\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 Punktladungen

Gegeben seien zwei Punktladungen $q_1 = q$ und $q_2 = -q$, die sich an den Orten $\vec{r}_1 = a\,\hat{e}_z$ und $\vec{r}_2 = -a\,\hat{e}_z$ befinden (siehe Abbildung).



(a) Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ an.

(b) Berechnen Sie das Elektrostatische Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r'})}{|\,\vec{r} - \vec{r}\,'\,|}$$

(c) Bestimmen Sie hieraus das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$.

(d) Führen Sie eine Multipolentwicklung bis zum ersten nicht verschwindenden Moment durch. Geben Sie dieses Moment explizit an. Welches Potential ergibt sich hieraus in großen Entfernungen $r \gg a$?

(e) Betrachten Sie den Limes $a \to 0$ bei gleichzeitiger Konstanz des Produktes $q\,a = p/2$. Berechnen Sie für diesen Grenzfall das Potential für $r \neq 0$.

(f) Den unter (e) betrachteten Grenzfall bezeichnet man als „mathematischen Dipol“ oder „idealen Dipol“. Zeigen Sie, dass sich aus dem Potential $\Phi(\vec{r}) = 1/4\pi\epsilon_0 \cdot \vec{p} \cdot \vec{r}/r^3$ für die Ladungsverteilung des mathematischen Dipols ergibt:

$$\rho_{dip}(\vec{r}) = -p\,\frac{\partial}{\partial z}\delta(\vec{r}) \tag{1}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Laplacegleichung und die Tatsache, dass $\Delta(-\frac{1}{4\pi\,r}) = \delta(\boldsymbol{x})$.

(g) Berechnen Sie Kraft

$$\vec{F}_D = \int d^3r' \rho_{dip}(\vec{r}\,')\,\vec{E}(\vec{r}\,') \tag{2}$$

die ein äußeres elektrisches Feld auf einen allgemeinen ($\rho_{dip}(\vec{r}) = -\vec{p}\cdot\nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$) mathematischen Dipol ausübt, der sich am Ort $\vec{r}_0$ befindet.
Hinweis: Führen Sie eine partielle Integration durch und benutzen Sie folgende Identität:
$\nabla(a \cdot b) = (b \cdot \nabla)a + (a \cdot \nabla)b + b \times (\nabla \times a) + a \times (\nabla \times b)$.

3 Magnetisierter Zylinder

Ein unendlich langer Zylinder (Radius R), habe eine intrinsische Magnetisierung entlang der Zylinderachse

$$\boldsymbol{M} = k\,s\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{3}$$

wobei k eine Konstante und s der Abstand zur Achse ist. Es gibt keine freien Ströme.

(a) Berechnen Sie alle gebundenen Ströme und das von ihnen erzeugte magnetische Feld.

(b) Verwenden Sie das Ampersche Gesetz um $\boldsymbol{H}$ zu berechnen. Bestätigen Sie damit das Ergebnis aus (a).

4 Oszillierende Punktladung

Eine Punktladung Q oszilliert harmonisch um eine im Koordinatenursprung ruhende Punktladung $-Q$. Q bewegt sich dabei mit der konstanten Frequenz ω auf einem entlang der z-Achse ausgerichteten Stab der Länge $2a$, dessen Schwerpunkt im Koordinatenursprung ruht. Damit beschreibt Q folgende Bahnkurve:

$$\mathbf{R}(t) = a\mathbf{e}_z \cos\omega t$$

Näherungsweise lässt sich das Vektropotential schreiben als:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int d^3x'\mathbf{j}(t - \frac{r}{c}, \mathbf{x}')$$

(a) Bestimmen Sie die Ladungsdichte ρ und die Stromdichte $\mathbf{j}$.

(b) Berechnen Sie aus der oben gegebenen Näherungsformel das Vektorpotential.

(c) Berechnen Sie das elektrische und magnetische Feld bis einschließlich zur Ordnung $\frac{1}{r}$.

Hinweis: Sie brauchen nur $\cos(\omega t - kr)$ bzw. $\sin(\omega t - kr)$ abzuleiten. Die anderen ortsabhängigen Terme $\frac{1}{r}$ und $\mathbf{e_r} \wedge \mathbf{e}_z$ liefern Beiträge zur Ordnung $\frac{1}{r^2}$ und sollen hier vernachlässigt werden. Außerdem betrachten wir das Feld nur außerhalb der Strom- und Ladungsverteilung, so dass gilt $\nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t \mathbf{E} = 0$. Nützlich kann auch die Formel $\nabla \wedge \big(f\mathbf{F}\big) = f(\nabla \wedge \mathbf{F}) + (\nabla f) \wedge \mathbf{F}$ sein.

5 Ebene elektromagnetische Welle

Betrachten Sie eine ebene elektromagnetische Welle im Vakuum, gegeben durch

$$\mathbf{E}(ct, \mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{B}(ct, \mathbf{x}) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}$$

wobei $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ komplexe Größen sein können. Außerdem gilt $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$.

(a) Zeigen Sie, dass die angegebenen Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ Lösungen der homogenen Wellengleichung ($\Box\, \mathbf{E} = \Box\, \mathbf{B} = 0$) sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Welle transversal ist, d.h. $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = 0$.

(c) Berechnen Sie die zeitlich gemittelte Energiedichte $u = \overline{\frac{1}{2}\big(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0}\big)}$ sowie den zeitlich gemittelten Poynting-Vektor $\mathbf{s} = \frac{1}{\mu_0}\overline{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}$ der elektromagnetischen Welle. Schreiben Sie die Ergebnisse als Funktion von $\mathbf{E}_0$.