Korbinian Münster (korbinian_muenster@ph.tum.de) **Blatt 4**

Ferienkurs Elektrodynamik - SS 2008

1 Ergänzungen zur Vorlesung

Zeigen sie, dass für periodische Ströme $\mathbf{j}^\mu(ct,\mathbf{x}) = \mathbf{j}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ die für große Abstände verschwinden ($\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty}\mathbf{j}^\mu = 0$) folgende Identitäten gelten:

(a)
$$\int d^3x\mathbf{j}(\mathbf{x}) = -i\omega\mathbf{p}$$

Hinweis: Zeigen sie zuerst, dass $\int d^3x\mathbf{j}(\mathbf{x}) = -\int d^3x\mathbf{x}\ (\nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{x}))$ gilt und verwenden sie dann die Kontinuitätsgleichung $\nabla\cdot\mathbf{j}(ct,\mathbf{x}) + \partial_t\rho(ct,\mathbf{x}) = 0$ und die Definition des elektrischen Dipolmoments $\mathbf{p} = \int d^3x\mathbf{x}\rho(\mathbf{x})$.

(b)
$$\int d^3x\mathbf{j}(\mathbf{x})\ (\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}) = -\mathbf{k}\wedge\mathbf{m} - i\omega\frac{1}{2}\int d^3x\rho(\mathbf{x})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{k})\mathbf{x}$$

Hinweis: Benutzen sie die Formel $\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$. Damit sollten sie folgenden Ausdruck erhalten:
$$\int d^3x\mathbf{j}(\mathbf{x})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}) = -\mathbf{k}\wedge\frac{1}{2}\int d^3x\mathbf{x}\wedge\mathbf{j}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\int d^3x\big(\mathbf{x}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) + \mathbf{j}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\big)$$

Verwenden sie des weiteren die Identität $\nabla\cdot\big(\mathbf{j}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})x_i\big) = (\nabla\cdot\mathbf{j})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})x_i + x_i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) + j_i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$ und die Definition des magnetischen Dipolmoments $\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int d^3x\mathbf{x}\wedge\mathbf{j}(\mathbf{x})$.

Lösungsvorschlag:

(a) Es gilt:
$$\nabla\cdot(x_i\mathbf{j}) = \mathbf{j}\cdot\nabla x_i + x_i\nabla\cdot\mathbf{j} = j_i + x_i\nabla\cdot\mathbf{j}$$

Mit Hilfe des Gaußschen-Satzes gilt also:
$$\int d^3x\mathbf{j} = -\int d^3x\mathbf{x}\nabla\cdot\mathbf{j}$$

Für $\mathbf{j}(ct,\mathbf{x}) = \mathbf{j}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ nimmt die Kontinuitätsgleichung folgende Gestalt an:
$$\nabla\cdot\mathbf{j}(ct,\mathbf{x}) = \nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} = -\partial_t\rho(ct,\mathbf{x}) = i\omega\rho(\mathbf{x})e^{-i\omega t} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{x}) = i\omega\rho(\mathbf{x})$$

Daraus folgt:
$$\int d^3x\mathbf{j}(\mathbf{x}) = -i\omega\int d^3x\mathbf{x}\rho(\mathbf{x}) = -i\omega\mathbf{p}$$

(b)
$$\mathbf{k}\wedge(\mathbf{x}\wedge\mathbf{j}) = \mathbf{x}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) - \mathbf{j}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) = \mathbf{x}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) + \mathbf{j}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) - 2\mathbf{j}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$$

Also:
$$\mathbf{j}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) = -\mathbf{k}\wedge\frac{1}{2}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{j}) + \frac{1}{2}\big(\mathbf{x}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) + \mathbf{j}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\big)$$

Des weiteren gilt mit Hilfe des Gaußschen-Satzes und der angegebenen Formel:

$$\int d^3x\big(\mathbf{x}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j})+\mathbf{j}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\big) = -\int d^3x(\nabla\cdot\mathbf{j})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{k})\mathbf{x}$$

Benutzt man nun die Identität aus Aufgabenteil (a) $\nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{x}) = i\omega\rho(\mathbf{x})$ und die Definition des magnetischen Moments m so folgt:

$$\int d^3x\mathbf{j}(\mathbf{x})\ (\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}) = -\mathbf{k}\wedge\mathbf{m} - i\omega\frac{1}{2}\int d^3x\rho(\mathbf{x})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{k})\mathbf{x}$$

2 Eichungen für ein konstantes B-Feld

(a) Zeigen sie mit $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, dass für die Vektorpotentiale $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\wedge\mathbf{x}$ und $\mathbf{A}' = Bx\mathbf{e}_y$ gilt:

$$\nabla\wedge\mathbf{A} = \nabla\wedge\mathbf{A}' = \mathbf{B}$$

(b) Die Vektorpotentiale $\mathbf{A}'$ und $\mathbf{A}$ sind also äquivalent zueinander und unterscheiden sich nur durch den Gradienten einer Skalarfunktion voneinander:

$$\mathbf{A} - \mathbf{A}' = \nabla f \tag{1}$$

Bestimmen sie eine Funktion f die Gleichung 1 erfüllt.

Lösungsvorschlag:

(a)

$$\nabla\wedge\mathbf{A} = \frac{1}{2}\nabla\wedge(\mathbf{B}\wedge\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{B}(\nabla\cdot x) - \frac{1}{2}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{x} = \frac{1}{2}(3\mathbf{B}-\mathbf{B}) = \mathbf{B}$$
$$\nabla\wedge\mathbf{A}' = \nabla\wedge(Bx\mathbf{e}_y) = B(\nabla x)\wedge\mathbf{e}_y = B\mathbf{e}_x\wedge\mathbf{e}_y = B\mathbf{e}_z = \mathbf{B}$$

(b)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}\wedge\mathbf{x}) = \frac{1}{2}B(\mathbf{e}_z\wedge(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)) = \frac{1}{2}B\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}' = B\begin{pmatrix}0\\ x\\ 0\end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\nabla f = \mathbf{A} - \mathbf{A}' = -\frac{1}{2}B\begin{pmatrix}y\\ x\\ 0\end{pmatrix}$$

Dazu lässt sich leicht ein Stammfunktion f angeben:

$$f = -\frac{1}{2}Bxy$$

3 Abstände in der Raum-Zeit

(a) Im Inertialsystem IS seien zwei Ereignisse

$$x = (ct_x, \mathbf{x}^T) = (5,1,1,2)a \qquad \text{und} \qquad y = (ct_y, \mathbf{y}^T) = (9,3,3,4)a$$

gegeben, wobei $a \neq 0$ beliebig ist.
Welchen Minkowski-Abstand haben die zwei Ereignisse? Ist dieser Abstand raumartig oder zeitartig, und ist es demnach möglich zwischen den zwei Ereignissen ein mitbewegtes Inertialsystem IS' zu definieren?

(b) Bestimmen sie die Lorentztransformation zwischen IS und IS', d.h. eine lineare Abbildung (4×4-Matrix) Λ die folgende Eigenschaften besitzt:

$$\Lambda(y-x) = \begin{pmatrix} c\tau \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Lambda^T g \Lambda = g$$

Wobei $g = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ der metrische Tensor ist.

Hinweis: Bringen sie zuerst den Vektor $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ durch eine Drehung R mit $R^T R = 1$ (3×3-Matrix) auf die Form $R(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = |\mathbf{y}-\mathbf{x}|\mathbf{e}_x$. Bringen sie dann den resultierenden Vierervektor durch die spezielle Lorentztransformation $\Lambda_v = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ auf die gewünschte Form. Zeigen sie letztlich, dass $\Lambda = \Lambda_v \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R \end{pmatrix}$ die gesuchte Lorentztransformation ist (Die Matrix R brauchen sie nicht explizit zu bestimmen).

Lösungsvorschlag:

(a)

$$y - x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} a$$

$$(y-x)^2 = (x^0)^2 - ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2) = (4^2 - 3\cdot 2^2)a^2 = 2^2a^2 > 0$$

Das heißt der Minkowski-Abstand ist zeitartig. Ist der Minkowski-Abstand zweier Ereignisse zeitartig, so lässt sich ein mitbewegtes Inertialsystem IS' definieren, d.h. ein Inertialsystem indem die zwei Ereignisse die gleiche Ortskoordinate besitzen ($\mathbf{x}' = \mathbf{y}'$). Die zwei Ereignisse liegen in IS' also auf der t'-Achse. y liegt also innerhalb des Lichtkegles von x.

(b) Zuerst drehen wir den Ortsvektor $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ durch eine Drehmatrix R auf die x-Achse (R ist nicht eindeutig, da die Orientierung der y-Achse und z-Achse beliebig ist). Der neue Ortsvektor hat folgende Gestalt:

$$R(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = |\mathbf{y}-\mathbf{x}|\mathbf{e}_x = 2\sqrt{3}a\mathbf{e}_x$$

Nun wollen wir den resultierenden Vierervektor durch die spezielle Lorentztransformation Λ_v auf die Form $\binom{c\tau}{\mathbf{0}}$ bringen:

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} c\tau \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der zweiten Zeile dieser Gleichung können wir β und γ bestimmen:

$$-4\gamma\beta + 2\sqrt{3}\gamma = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} = 2$$

Jetzt müssen wir nur noch zeigen, dass mit $\Lambda = \Lambda_v \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R \end{pmatrix}$ gilt:

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

$$\begin{aligned}
\Lambda^T g \Lambda &= \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R^T \end{pmatrix} \Lambda_v^T g \Lambda_v \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R^T \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R \end{pmatrix} & (2) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & -R^T R \end{pmatrix} & (3) \\
&= g & (4)
\end{aligned}$$

Wobei ausgenutz wurde, dass $\Lambda_v^T g \Lambda_v = g$ und $R^T R = 1$ gilt.

4 Feld eines bewegten Dipols

Ein elektrischer Dipol ruht im Koordinatenursprung des Inertialsystems IS. Ein zweites Inertialsystem IS' entfernt sich von IS mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$. Das Viererpotential in IS is gegeben durch:

$$A = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}\mathbf{x}}{r^3} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen sie das elektrische und magnetische Feld in IS.

(b) Berechnen sie das Viererpotential in IS'. Drücken sie die alten Koordinaten $x = (ct, \mathbf{x})$ durch die neuen Kordinaten $x' = (ct', \mathbf{x}')$ aus.

(c) Berechnen sie das elektrische und magnetische Feld in IS'. Beachten sie dabei, dass sie nach den neuen Koordinaten ableiten müssen.

(d) Gibt es ein Inertialsystem IS' in dem das elektrische Feld verschwindet und nur noch ein magnetisches Feld übrig bleibt?

Lösungsvorschlag:

(a)

$$\mathbf{B} = \nabla_\mathbf{x} \wedge \mathbf{A} = 0$$

$$\mathbf{E} = -\nabla_\mathbf{x}\phi - \partial_t \mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla_\mathbf{x}\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}\nabla_\mathbf{x}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}) + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{p})\nabla_\mathbf{x}\frac{1}{r^3}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(3\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{r^5}\mathbf{x} - \frac{1}{r^3}\mathbf{p}\right)$$

(b)

$$A' = \Lambda A = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi/c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\phi/c \\ -\beta\gamma\phi/c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also:

$$\mathbf{A}' = -\beta\gamma\phi/c\mathbf{e}_x \qquad \text{und} \qquad \phi' = \gamma\phi$$

Wir müssen nun x durch x' asudrücken:

$$x = \Lambda^{-1}x' = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x' = \begin{pmatrix} \gamma(ct' + \beta x) \\ \gamma(x' + vt') \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{x}(x') = \begin{pmatrix} \gamma(x'+vt') \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad r(x') = |\mathbf{x}| = (\gamma^2(x'+vt')^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}$$

(c) Bei der Berechnung der Felder werden folgende Ableitungen auftauchen:

–

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}'} \frac{\mathbf{x}(x')\cdot\mathbf{p}}{r^3(x')} &= (\mathbf{x}\cdot\mathbf{p})\nabla_{\mathbf{x}'}\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3}\nabla_{\mathbf{x}'}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}) && (5)\\ &= -3\frac{1}{r^5}\begin{pmatrix} \gamma^2(x'+vt') \\ y' \\ z' \end{pmatrix}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}) + \frac{1}{r^3}\mathrm{diag}(\gamma,1,1)\mathbf{p} && (6)\\ &= -\mathrm{diag}(\gamma,1,1)\left(3\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{r^5}\mathbf{x} - \frac{1}{r^3}\mathbf{p}\right) && (7) \end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned} \partial_{t'} \frac{\mathbf{x}(x')\cdot\mathbf{p}}{r^3(x')} &= (\mathbf{x}\cdot\mathbf{p})\partial_{t'}\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3}\partial_{t'}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}) && (8)\\ &= -3\frac{1}{r^5}\gamma^2(x'+vt')v(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}) + \frac{1}{r^3}\gamma v p_x && (9)\\ &= -\gamma\beta c\left(3\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{r^5}x - \frac{1}{r^3}p_x\right) && (10) \end{aligned}$$

Für das elektrische Feld in IS' ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\nabla_{\mathbf{x}'}\phi'(x') - \partial_{t'}\mathbf{A}(x') && (11)\\ &= -\gamma\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla_{\mathbf{x}'}\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{r^3} + \gamma\beta\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{c}\partial_{t'}\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{r^3}\mathbf{e}_x && (12)\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\gamma\mathrm{diag}(\gamma,1,1)\left(3\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{r^5}\mathbf{x} - \frac{1}{r^3}\mathbf{p}\right) - \gamma^2\beta^2\left(3\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{r^5}x - \frac{1}{r^3}p_x\right)\mathbf{e}_x\right) && (13)\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\gamma\left(3\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{r^5}\begin{pmatrix} \gamma(1-\beta^2)x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} \gamma(1-\beta^2)p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}\right) && (14)\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\gamma\left(3\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{r^5}\begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma}x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma}p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}\right) && (15)\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\mathrm{diag}(1,\gamma,\gamma)\left(3\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{r^5}\mathbf{x} - \frac{1}{r^3}\mathbf{p}\right) && (16) \end{aligned}$$

Das Feld wird also in y- und z-Richtung verstärkt (senkrecht zur Bewegungsrichtung).

Für das magnetische Feld in IS' ergibt sich dann:

$$\mathbf{B}' = \nabla_{\mathbf{x}'} \wedge \mathbf{A}'(x') \tag{17}$$
$$= -\gamma\beta \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \nabla_{\mathbf{x}'} \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{r^3} \wedge \mathbf{e}_x \tag{18}$$
$$= \beta\gamma \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \mathrm{diag}(\gamma,1,1)\left(3\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{r^5}\mathbf{x} - \frac{1}{r^3}\mathbf{p}\right) \wedge \mathbf{e}_x \tag{19}$$
$$= \beta\gamma \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \left(3\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{r^5}\begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} - \frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} 0 \\ p_z \\ -p_y \end{pmatrix}\right) \tag{20}$$

(d) Ein solches Inertialsystem kann es nicht geben, da $\mathbf{B}^2 - \frac{1}{c^2}\mathbf{E}^2$ eine Invariante unter Lorentztransformationen ist.

5 Strahlung einer rotierenden Hohlkugel

Auf einer im Koordinatenursprung zentrierten Kugelschale mit Radius R und verschwindender Dicke ist die Ladung Q gleichförmig verteilt. Die Kugel dreht sich um die z-Achse mit einer vorgegebenen, zeitabhängigen Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$. Im Zentrum ruht ein Punktteilchen der Ladung $-Q$.

(a) Geben sie die Ladungsdichte ρ an. Ist ρ zeitabhängig?

(b) Zeigen sie, dass der durch die Rotation entstehende Strom $\mathbf{j}(ct, \mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\omega(t) \wedge \mathbf{x}$ divergenzfrei ist. Zeigen sie desweiteren unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung, dass dieses Ergebnis äquivalent zum Ergebnis aus Teilaufgabe (a) ist.

(c) Berechnen oder argumentieren sie warum das elektrische Dipol- und Quadrupolmoment der Anordnung verschwindet.
(D.h. es gibt auch keine elektrische Dipol- und Quadrupolstrahlung.)

(d) Zeigen sie, dass $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$ für $r > R$ gleich Null ist.
(Die Formel für ϕ stimmt so, da ρ nicht von der Zeit abhängt.)

Hinweis: Benutzen sie folgende Formeln (Gleichung 21 gilt für $r > r'$):

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos(\vartheta)) \tag{21}$$

$$\int_{-1}^{1} dx P_m(x) P_n(x) = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \qquad \text{und} \qquad P_1(x) = 1 \tag{22}$$

(e) Zeigen sie, dass $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = r - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{x}' + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$ gilt.

(f) Ausgehend von der Strahlungsformel gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \frac{\mathbf{j}\left(t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c})\mathbf{x}'\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\ &\approx \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \frac{\mathbf{j}\left(t - \frac{r-\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{x}'}{c}, \mathbf{x}'\right)}{r} \\ &\approx \frac{\mu_0}{4\pi r}\int d^3x' \left(\mathbf{j}(t - \frac{r}{c}, \mathbf{x}') + \partial_t \mathbf{j}(t - \frac{r}{c}, \mathbf{x}') \cdot \frac{\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{x}'}{c}\right)\end{aligned} \tag{23}$$

Vollziehen sie die Schritte in Gleichung 23 nach und berechnen sie in dieser Näherung das Vektorpotential $\mathbf{A}$.

Hinweis: Bemnutzen sie folgende Formeln:

$$\int d\Omega' \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_{r'} = 0 \tag{24}$$

$$\int d\Omega' \big(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_{r'}\big)\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_{r'} = \frac{4\pi}{3}\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_r \tag{25}$$

(g) Berechnen sie das elektrische Feld für $r > R$.

Lösungsvorschlag:

(a)

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r-R) - Q\delta(\mathbf{x})$$

ρ ist nicht zeitabhängig ($\partial_t \rho = 0$).

(b)

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = (\omega \wedge \mathbf{x})\,\nabla\rho + \rho\,\nabla \cdot (\omega \wedge \mathbf{x}) = \omega \wedge \mathbf{x}\left(\frac{Q}{4\pi R^2}\frac{\mathbf{x}}{r}\partial_r\delta(r-R) - Q\nabla\delta(\mathbf{x})\right) - \rho\omega(\nabla \wedge \mathbf{x}) = 0 \tag{26}$$

Betrachtet man die Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial_t \rho$, so folgt die Äquivalenz:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \partial_t \rho = 0$$

(c) In der folgenden Diskussion sei das Koordinatensystem immer so gewählt, dass dessen Ursprung im Mittelpunkt der Kugelschale liegt.
Das elektrische Dipolmoment muss verschwinden, da die Anornung kugelsymmetrisch ist und sich somit keine Richtung auszeichnet in die das elektrische Dipolmoment zeigen könnte.
Wähle das Koordinatensystem so, dass der Quadrupoltensor diagonal ist (ist für jedes Koordinatensystem erfüllt, da es kein ausgezeichnetes Koordinatensystem gibt). Die drei Diagonalelemente müssen dann den gleichen Wert haben ($Q_{11} = Q_{22} = Q_{33}$), da die drei Raumrichtungen äquivalent sind. Da der Quadrupoltensor aber spurlos ist muss gelten:

$$\sum_{i=1}^{3} Q_{ii} = 3Q_{11} = 0$$

Damit ist der ganze Quadrupoltensor gleich Null.

(d)

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x' \frac{\rho(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{4\pi}\int d\Omega' \frac{1}{|\mathbf{x} - R\mathbf{e}_r|} - Q\frac{1}{r}\right)$$

Für $r > R$ gilt mit:

$$\int d\Omega' \frac{1}{|\mathbf{x} - R\mathbf{e}_r|} = 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\vartheta) = 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^l}{r^{l+1}} \int_{-1}^{1} dx P_0(x) P_l(x) = 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^l}{r^{l+1}} 2\delta_{0l} = 4\pi\frac{1}{r}$$

Zusammen ergibt sich dann für ϕ:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{4\pi}4\pi\frac{1}{r} - Q\frac{1}{r}\right) = 0$$

(e) Unter Verwendung der Formel $\big(1+x\big)^\alpha = 1 + \alpha x + \mathcal{O}(x^2)$ gilt:

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = \big(r^2 + r'^2 - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'\big)^{1/2} = r\left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{1}{r}\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{x}'\right)^{1/2} = r\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{1}{r}\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{x}'\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right) = r - \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{x}' + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$$

(f)

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int d^3x'\,\frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r'-R)\left(\omega\big(t-\frac{r}{c}\big)\wedge\mathbf{x}' + \left(\partial_t\omega\big(t-\frac{r}{c}\big)\wedge\mathbf{x}'\right)\frac{\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{x}'}{c}\right) \tag{27}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{Q}{4\pi}\int d\Omega'\left(R\omega\big(t-\frac{r}{c}\big)\wedge\mathbf{e}'_r + \frac{1}{c}R^2(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}'_r)\left(\partial_t\omega\big(t-\frac{r}{c}\big)\wedge\mathbf{e}'_r\right)\right) \tag{28}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q}{4\pi}\frac{R}{r}\int d\Omega'\left(\omega\big(t-\frac{r}{c}\big)\mathbf{e}_z\wedge\mathbf{e}'_r + \frac{R}{c}\partial_t\omega\big(t-\frac{r}{c}\big)(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}'_r)\mathbf{e}_z\wedge\mathbf{e}'_r\right) \tag{29}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{QR^2}{3c}\frac{\partial_t\omega\big(t-\frac{r}{c}\big)}{r}\mathbf{e}_z\wedge\mathbf{e}_r \tag{30}$$

(g)

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{QR^2}{3c}\frac{\partial_t^2\omega\big(t-\frac{r}{c}\big)}{r}\mathbf{e}_z\wedge\mathbf{e}_r$$