

1 Relativistik

experimentelle Beobachtung:

- Licht hat eine endliche Geschwindigkeit c (allgemeiner: endliche Wirkungsgeschwindigkeit).
- In jedem Inertialsystem (unbeschleunigtes Bezugssystem) gelten die Naturgesetze in gleicher Form.

Diese Postulate sind die Grundlage für die spezielle Relativitätstheorie. Betrachte zwei Inertialsysteme IS und IS' mit den Koordinaten $x = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$ und $x' = \begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix}$. Die Relativgeschwindigkeit der beiden Inertialsysteme zueinander sei \mathbf{v} . Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich der Ursprung von IS' am Ursprung von IS , und es werde ein Lichtblitz ausgesendet. Nach dem Relativitätsprinzip breitet sich dieser Lichtblitz in beiden Inertialsystemen gleich schnell aus, und es muss daher gelten:

$$c^2 = \frac{\mathbf{x}^2}{dt^2} = \frac{\mathbf{x}'^2}{dt'^2} \Rightarrow c^2 dt^2 - \mathbf{x}^2 = c^2 dt'^2 - \mathbf{x}'^2$$

Dies definiert den Abstand im Minkowskiraum:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \mathbf{x}^2$$

Dieser Abstand hat in allen Inertialsystemen den gleichen Wert. Dabei gibt es drei verschiedene Kategorien von Abständen:

- lichtartig: $ds^2 = 0 \Rightarrow v = c$
- zeitartig: $ds^2 > 0 \Rightarrow v < c$
für solche Abstände kann ein mitbewegtes Inertialsystem definiert werden, d.h.: $d\mathbf{x}'^2 = 0$ und $dt' = d\tau = ds/c$ (Eigenzeit)
- raumartig: $ds^2 < 0 \Rightarrow v > c$
für solche Abstände kann kein mitbewegtes Inertialsystem definiert werden \rightarrow Ereignisse die durch einen raumartigen Abstand separiert sind können sich nicht gegenseitig beeinflussen (die Wechselwirkung/Information müsste sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten)

Nun interessieren wir uns dafür wie sich die Koordinaten unter einem Bezugssystemwechsel transformieren (Lorentztransformation). Die zugehörige Transformation ist linear, d.h. sie lässt sich als Matrix schreiben:

$$x' = \Lambda x$$

Die Invarianz des Abstandes impliziert:

$$s^2 = x^T g x = (\Lambda x)^T g (\Lambda x) = x^T (\Lambda^T g \Lambda) x = s'^2 \quad \text{mit} \quad g = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Lambda^T g \Lambda &= g & (1) \\ \Rightarrow |\det \Lambda| &= 1\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat die gleiche Gestalt wie diejenige für Drehungen im euklidischen Raum:

$$R^T 1 R = 1$$

für R z.B.:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dementsprechend erfüllt folgende Matrix Gleichung 1:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\chi & -\sinh\chi & 0 & 0 \\ -\sinh\chi & \cosh\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Lorentztransformationen wie die in Gleichung 2, die die Zeit mit transformieren heißen Lorentzboosts. Die Einträge in dieser Matrix können durch die Geschwindigkeit ausgedrückt werden, mit der sich die entsprechenden Inertialsysteme zueinander bewegen:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

mit

$$\gamma = \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\mathbf{v}}{c}$$

2 physikalische Interpretation und relativistische Effekte

2.1 Galileitransformation - Lorentztransformation

Betrachte zwei Inertialsysteme die sich mit der Geschwindigkeit v voneinander entfernen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf eine Raumdimension. Wir haben bereits gesehen wie sich die Koordinaten (ct, x) und (ct', x') der Inertialsysteme IS und IS' in der speziellen Relativitätstheorie ineinander transformieren. In der klassischen Version lautet die Transformation folgendermaßen:

- In jedem Inertialsystem vergeht die Zeit gleich, d.h. $t' = t$
- Die Ortskoordinaten x' und x sind um $t \cdot v$ verschoben, d.h. $x' = x - t \cdot v$

Diese (klassische) Transformation heißt Galilei-Transformation. In Matrix-Schreibweise lautet sie:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (4)$$

Der Unterschied zur Lorentztransformation ist also, dass $\gamma = 1$, d.h. $c = \infty$ und die Zeit nicht transformiert wird.

Als nächstes wollen wir uns die Gleichungen für die Koordinatenlinien (Achsen) des Inertialsystems IS' im Inertialsystem IS ansehen. Die Koordinatenlinie von t' ist definiert durch $x' = 0$ und die Koordinatenlinie von x' ist definiert durch $t' = 0$.

- Galilei-Transformation:

t' -Linie: aus $x' = 0$ folgt $t = \frac{1}{v}x$, d.h. eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung $\frac{1}{v}$

x' -Linie: aus $t' = 0$ folgt $t = 0$, d.h. eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung 0. In Abbildung 1 ist dies graphisch verdeutlicht.

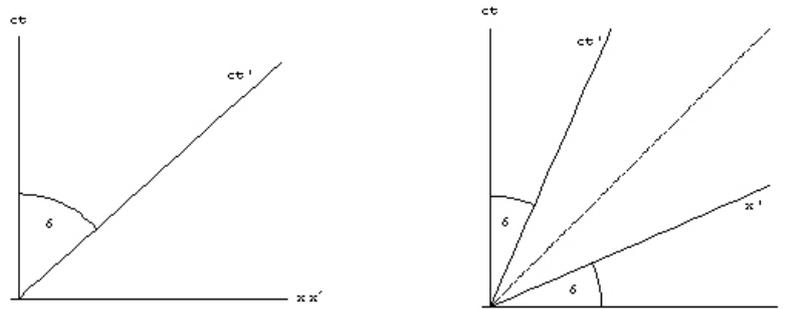


Abbildung 1: Achsen bei Galilei-Trafo

Abbildung 2: Achsen bei Lorentz-Trafo

Da v in der klassischen Mechanik nicht beschränkt ist, kann man also zu jedem Punkt P in der Raumzeit ein Inertialsystem finden, so dass dieser Punkt auf der t' -Linie liegt ($\Rightarrow x' = 0$, d.h. es gibt ein mitbewegtes Inertialsystem von 0 nach P, die Punkte 0 und P sind 'gleichortig').

- Lorentz-Transformation:

ct' -Linie: aus $x' = 0$ folgt $ct = \frac{1}{\beta}x$, d.h. eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung $\frac{1}{\beta}$

x' -Linie: aus $ct' = 0$ folgt $ct = \beta x$, d.h. eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung β .

Die beiden Koordinatenlinien sind also, wie in Abbildung 2 zu sehen ist symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden (da Steigungen invers zueinander).

Die Winkelhalbierende wird Lichtkegel genannt, da hier $v = c$ gilt. In 2 Raumdimension wird der Begriff Kegel klarer (siehe Abbildung 3).

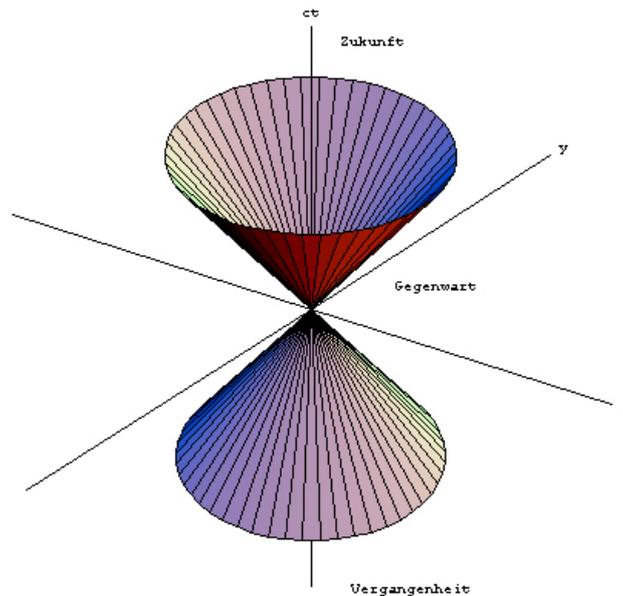


Abbildung 3: Lichtkegel in 2 Raumdimensionen

Da stets $\beta < 1$ gilt, kann die ct' -Linie nie außerhalb des Lichtkegels und die x' -Linie nie innerhalb des Lichtkegels liegen. Der Lichtkegel separiert die Raumzeit in drei Bereiche: Zukunft ($t > 0$ und innerhalb des Lichtkegels), Vergangenheit ($t < 0$ und innerhalb des Lichtkegels) und Gegenwart (außerhalb des Lichtkegels). Für jeden Punkt in der Vergangenheit und Zukunft lässt sich ein Inertialsystem finden, so dass dieser Punkt auf der ct' -Achse liegt ($\Rightarrow x' = 0$, die Punkte 0 und P sind 'gleichortig'). Für jeden Punkt in der Gegenwart lässt sich ein Inertialsystem finden, so dass dieser Punkt auf der x' -Achse liegt ($\Rightarrow t' = 0$, d.h. die Punkte 0 und P sind 'gleichzeitig', daher der Begriff Gegenwart).

2.2 Längenkontraktion, Zeitdilatation

- Längenkontraktion

Betrachte einen Maßstab der Länge l der in IS ruht. Wir interessieren uns jetzt für dessen Länge l' in IS'. Um die Länge l' zu bestimmen müssen wir in IS' gleichzeitig die Positionen der Enden des Maßstabes messen, d.h. $\delta t' = 0$ und $\delta x' = l'$. Wenn wir diesen Vektor zurücktransformieren, dann erhalten wir die Länge des Stabes in IS.

$$l = \left(\Lambda^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ l' \end{pmatrix} \right)^1 = \gamma l' \quad \Rightarrow \quad l' = \frac{1}{\gamma} l$$

D.h. für den bewegten Beobachter erscheint der Maßstab kleiner.

- Zeitdilatation

Betrachte den Invarianten Abstand $ds^2 = (cdt)^2 - d\mathbf{x}^2$. Sei $ds^2 > 0$, dann lässt sich ein mitbewegtes Inertialsystem definieren. In diesem Inertialsystem gilt dann $ds^2 = (cd\tau)^2$, wobei τ die Eigenzeit des mitbewegten Inertialsystems ist. Zusammen ergibt sich:

$$(cd\tau)^2 = (cdt)^2 - d\mathbf{x}^2 = (cdt)^2 \left(1 - \frac{d\mathbf{x}^2}{(cdt)^2} \right) = (cdt)^2 (1 - \beta^2) = (cdt)^2 \frac{1}{\gamma^2}$$

$$dt = \gamma d\tau$$

'Bewegte Uhren gehen langsamer.'

2.3 relativistische Geschwindigkeits-Addition (nur eine Raumdimension)

Betrachte 3 Inertialsysteme IS_1 , IS_2 und IS_3 , wobei sich IS_2 mit der Geschwindigkeit v_1 von IS_1 entfernt und IS_3 sich mit der Geschwindigkeit v_2 von IS_2 entfernt. Es stellt sich nun die Frage mit welcher Geschwindigkeit v sich IS_3 von IS_1 entfernt. Aufgrund der Gruppeneigenschaft der Lorentztransformation wissen wir, dass $\Lambda(v_1) \cdot \Lambda(v_2) = \Lambda(v)$. Verwenden wir die explizite Form der Lorentztransformation, so gilt:

$$\gamma(v) = (1 - \beta^2)^{-1/2} = (\Lambda(v_1) \cdot \Lambda(v_2))_1^1 \quad (5)$$

$$= \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) = \left(\frac{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}{(1 + \beta_1 \beta_2)^2} \right)^{-1/2} \quad (6)$$

$$= \left(1 - \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (7)$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{v}{c} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$$

3 Vierervektoren, kovariant und kontravariant

Kontravariante Vierervektoren (Indizes oben) transformieren sich wie:

$$a' = \Lambda a$$

Kovariante Vierervektoren (Dualvektoren, Indizes unten) transformieren sich wie:

$$b' = (\Lambda^{-1T})b = (g\Lambda g)b$$

Aus den kontravarianten Komponenten lassen sich durch den metrischen Tensor die dazugehörigen kovarianten Vektoren konstruieren und umgekehrt:

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu \quad x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu$$

mit

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Damit nimmt das Skalarprodukt im Minkowskiraum folgende Gestalt an:

$$s^2 = x^T g x = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = x_\mu x^\mu \equiv x \cdot x$$

Eine Liste kontravarianter Vektoren:

- Ort:

$$x = (x^\mu) = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

- Geschwindigkeit:

$$u = \frac{d}{d\tau}x = \gamma \frac{d}{dt}x = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad d\tau = \frac{1}{\gamma}dt$$

(da $d\tau$ lorentz-invariant ist)

- Impuls:

$$p = mu = \begin{pmatrix} m\gamma c \\ m\gamma \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$$

und es gilt (Energie-Impulsbeziehung):

$$p^2 = p_\mu p^\mu = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$$

- Strom:

$$j = \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{v}\rho \end{pmatrix}$$

da:

$$c\rho = cdt \frac{cdQ}{dx^4}$$

$$\mathbf{v}\rho = d\mathbf{x} \frac{dQ}{dt dV} = d\mathbf{x} \frac{cdQ}{dx^4}$$

und

$$dx'^4 = dx^4 |det\Lambda| = dx^4$$

- Potential:

$$A = \begin{pmatrix} \varphi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}$$

Der Vierergradient ist ein kovarianter Vektor:

$$\partial = (\partial_\mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ \nabla \end{pmatrix}$$

denn:

$$\partial_{\mu'} = (\partial_{\mu'} x^\mu) \partial_\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_{\mu'} \partial_\mu \quad \Rightarrow \quad \partial' = \Lambda^{-1T} \partial \quad \text{mit} \quad x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_{\mu'} x^{\mu'}$$

4 Kovariante Form der Lorentzkraft

Die Lorentzkraft ist gegeben durch:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}), \quad \text{mit} \quad \mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$$

Aus der Energie-Impulsbeziehung folgt:

$$\frac{d}{dt} E = c^2 \frac{\mathbf{p}}{E} \cdot \dot{\mathbf{p}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} p^0 = \frac{d}{dt} E/c = q \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{E}$$

Und daraus folgt für die Ableitung nach der Eigenzeit τ :

$$\frac{d}{d\tau} p^0 = q\gamma\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}/c = q\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}/c \quad (8)$$

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{p} = q(\gamma c \mathbf{E}/c + \gamma \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = q(u^0 \mathbf{E}/c + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) \quad (9)$$

Zusammen ergibt sich für den Viererimpuls:

$$\frac{d}{d\tau} p = m \frac{d}{d\tau} u = qFu \quad (10)$$

bzw.

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = m \frac{d}{d\tau} u^\mu = qF^\mu_{\nu} u^\nu \quad (11)$$

mit

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Nun lässt sich die Frage wie sich die Felder unter Lorentztransformation verändern beantworten:

$$\begin{aligned} m \frac{d}{d\tau} (\Lambda u) &= \Lambda m \frac{d}{d\tau} u = \Lambda qFu = q(\Lambda F \Lambda^{-1})(\Lambda u) \\ &\Rightarrow F' = \Lambda F \Lambda^{-1} \end{aligned}$$

5 Kovariante Form der Maxwellgleichungen

Die Maxwellgleichungen:

Die vier homogenen Gleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (13)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \quad (14)$$

Die vier inhomogenen Gleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (15)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (16)$$

Die inhomogenen Maxwellgleichungen lassen sich auch mit Hilfe von F ausdrücken:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \begin{cases} \frac{1}{c} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} c \rho = \mu_0 j^0 & \text{für } \nu = 0 \\ (\nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E})^i = \mu_0 \mathbf{j}^i & \text{für } \nu = i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (17)$$

$$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j \quad (18)$$

wobei

$$F^{\mu\nu} = F^\mu_\lambda g^{\lambda\nu} = (F \cdot g)^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \quad (19)$$

Die homogenen Maxwellgleichungen lassen sich mit dem zu F dualen Tensor \tilde{F} ausdrücken:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3/c & -E_2/c \\ B_2 & -E_3/c & 0 & E_1/c \\ B_3 & E_2/c & -E_1/c & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \quad (20)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{cases} -\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{für } \nu = 0 \\ -\frac{1}{c} (\partial_t \mathbf{B} + \nabla \wedge \mathbf{E})^i = 0 & \text{für } \nu = i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (21)$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (22)$$

6 Invarianten des elektromagnetischen Feldes

Aus F lassen sich die Invarianten des Feldes bezüglich Lorentztransformationen ableiten.

Es lässt sich zeigen dass es genau zwei Invarianten gibt, nämlich:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \frac{1}{c^2}\mathbf{E}^2) \quad (23)$$

und

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{4}{c}\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \quad (24)$$

Die Invarianz von Gleichung 23 lässt sich leicht zeigen:

$$F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} = -\text{Tr}(F' \cdot F') = -\text{Tr}(\Lambda F \Lambda^{-1} \Lambda F \Lambda^{-1}) = -\text{Tr}(F \cdot F)$$

7 Potentiale und Eichinvarianz

Man kann für die Felder (6 Funktionen) Potentiale (4 Funktionen) einführen, so dass die homogenen Maxwellgleichungen automatisch erfüllt sind:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial_t\mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$$

Der Feldstärketensor nimmt dann folgende Gestalt an:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Die homogenen Maxwellgleichungen werden wie schon erwähnt automatisch erfüllt:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \partial_\mu \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \partial^\alpha A^\beta = 0$$

Die Bewegungsgleichungen für die Potentiale lauten dann:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial^\mu \partial^\nu A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu A^\mu = \square A^\nu - \partial^\nu \partial^\mu A^\mu$$

mit dem D'Alembert-Operator

$$\square = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2$$

Die Potentiale sind aber nicht eindeutig festgelegt, d.h. verschiedene Potentiale liefern den gleichen Feldstärketensor. Die physikalisch relevanten/messbaren Größen sind die Felder und nicht die Potentiale. Potentiale die die gleichen Felder liefern heißen äquivalent zueinander.

Im Folgenden wird gezeigt, dass die Potentiale A^μ und $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f$ für eine beliebige Funktion $f = f(ct, \mathbf{x})$ äquivalente zueinander sind:

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu + \partial^\mu \partial^\nu f - \partial^\nu \partial^\mu f = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}$$

Die Wahl dieses Freiheitsgrades in den Potentialen nennt man Eichung. Für bestimmte Eichungen vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen:

- Lorenzeichung: wählt man f so, dass gilt:

$$-\square f = \partial_\mu A^\mu \quad \text{und} \quad A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f$$

so gilt:

$$\partial_\mu F'^{\mu\nu} = \square A'^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A'^\mu = \square A'^\nu + \partial^\nu \square f = \square A'^\nu = \mu_0 j^\nu$$

$$\Rightarrow \square A'^\nu = \mu_0 j \quad \text{und} \quad \partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \square f = 0$$

- Coulombeichung: wählt man f so, dass gilt:

$$\partial_i A^i = \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla^2 f \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{und} \quad A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f$$

so gilt:

$$\begin{aligned} \square A^0 - \partial^0 \partial_\mu A^\mu &= \square A^0 - \partial^0 (\partial_0 A^0 + \nabla \cdot \mathbf{A}) \\ &= -\nabla^2 A^0 - \partial^0 \nabla \cdot \mathbf{A} = -\nabla^2 A^0 - \partial^0 \nabla^2 f \\ &= -\nabla^2 (A^0 + \partial^0 f) = -\nabla^2 A'^0 = \mu_0 j^0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 \varphi' = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{A}' = \partial_i A'^i = \partial_i A^i + \partial_i \partial^i f = \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 f = 0$$

8 Strahlung

8.1 Lösung der Inhomogenen Maxwellgleichungen

Wir wollen nun ausgehend von den Differentialgleichungen für die Potentiale elektromagnetische Strahlung untersuchen. Dazu Wählen wir die Lorenzeichung, d.h. $\partial_\mu A^\mu = 0$ und $\square A^\nu = \mu_0 j^\nu$. Wie man solche partiellen Differentialgleichungen löst wurde in der ersten Vorlesung besprochen: Die allgemeine Lösung setzt sich zusammen aus dem homogenen und dem inhomogenen Teil. Der homogene Teil entspricht elektromagnetischen Wellen (Wellenausbreitung im Vakuum). Die inhomogene Lösung erhält man aus der Faltung

der Inhomogenität (hier $\mu_0 j^\nu$) mit der Greens-Funktion $G(ct, \mathbf{x})$ (Fundamentallösung). Die Greens-Funktion muss folgende Gleichung erfüllen.

$$\square G(ct, \mathbf{x}) = \delta^{(4)}(ct, \mathbf{x})$$

Im Folgenden interessieren wir uns bloß für die inhomogene Lösung. Fordert man, dass die Lösung der Kausalität d.h. dem Ursache-Wirkungs-Prinzip genügt, so nimmt die Greens-Funktion folgende Gestalt an:

$$G(ct, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(|\mathbf{x}| - ct)$$

Falten wir jetzt die Greens-Funktion mit der Inhomogenität, so erhalten wir folgende Lösung:

$$A^\nu(ct, \mathbf{x}) = (G * \mu_0 j^\nu)(ct, \mathbf{x}) \quad (26)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^4 x' \frac{j^\nu(ct', \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - c(t - t')) \quad (27)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 x' \frac{j^\nu(ct - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (28)$$

wobei die Faltung zweier Funktionen definiert ist als:

$$(f * g)(x) = \int dx' f(x - x')g(x')$$

8.2 periodische Ströme, Fernfeldnäherung, Dipolnäherung

Wir wollen nun explizit das Strahlungsfeld berechnen. Dazu nehmen wir periodische Ströme an und betrachten nur das asymptotische Verhalten des Feldes für große Entfernungen ($|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$ für $\mathbf{x}' \in \text{supp}(j^\mu)$, 'Fernfeldnäherung'):

$$j^\mu(ct, \mathbf{x}) = j^\mu(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = (r^2 + r'^2 - 2\mathbf{x}\mathbf{x}')^{1/2} = r - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{x}' + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Im Nenner nähern wir $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r$. Daraus ergibt sich mit $k = \frac{\omega}{c}$ und $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_r$:

$$A^\mu = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 x' \frac{j^\mu(\mathbf{x}')e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{-i\omega t} \quad (29)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 x' \frac{j^\mu(\mathbf{x}')e^{ik(r-\mathbf{e}_r\mathbf{x}')}}{r} e^{-i\omega t} \quad (30)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \int d^3 x' j^\mu(\mathbf{x}')e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}'} \quad (31)$$

Desweiteren nehmen wir an, dass die Wellenlänge der emittierten Strahlung viel größer ist als die Abmessungen der Strahlungsquelle ($kr' \ll 1$ für $\mathbf{x}' \in \text{supp}(j^\mu)$), so dass wir die Exponentialfunktion entwickeln können:

$$e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}'} = 1 - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' + \mathcal{O}((kr')^2)$$

Für ϕ folgt dann mit $Q = \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') = 0$ und $\mathbf{p} = \int d^3x' \rho(\mathbf{x}')\mathbf{x}'$:

$$\phi_{E1} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') (1 - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}') = -i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$$

ϕ enthält keinen Beitrag der proportional zum magnetischen Dipolmoment m ist, daher:

$$\phi_{M1} = 0$$

Für \mathbf{A} entstehen mehrere Beiträge. Um diese Beiträge durch Dipolmomente auszudrücken brauchen wir folgende Identitäten:

$$\int d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') = - \int d^3x' \mathbf{x}' \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}') = -i\omega \int d^3x' \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') = -i\omega \mathbf{p} \quad (32)$$

$$\int d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' = -\mathbf{k} \wedge \frac{1}{2} \int d^3x' \mathbf{x}' \wedge \mathbf{j}(\mathbf{x}') - i\omega \frac{1}{2} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' \quad (33)$$

Den zweiten Term in Gleichung 33 vernachlässigen wir (Quadrupolstrahlung). Benutzt man $\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3x' \mathbf{x}' \wedge \mathbf{j}(\mathbf{x}')$ so ergibt sich für \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}_{E1} + \mathbf{A}_{M1} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} (-i\omega \mathbf{p} + i\mathbf{k} \wedge \mathbf{m})$$

Für das elektrische und magnetische Feld folgt schließlich:

- elektrische Dipolstrahlung (bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\frac{1}{r})$):

$$\mathbf{B}_{E1} = \nabla \wedge \mathbf{A}_{E1} \quad (34)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} k^2 \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{p} \quad (35)$$

$$\mathbf{E}_{E1} = -\nabla \phi_{E1} - \partial_t \mathbf{A}_{E1} \quad (36)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} k^2 \mathbf{e}_r \wedge (\mathbf{p} \wedge \mathbf{e}_r) \quad (37)$$

- magnetische Dipolstrahlung (bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\frac{1}{r})$):

$$\mathbf{B}_{M1} = \nabla \wedge \mathbf{A}_{M1} \quad (38)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} k^2 \mathbf{e}_r \wedge (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_r) \quad (39)$$

$$\mathbf{E}_{M1} = -\partial_t \mathbf{A}_{M1} \quad (40)$$

$$= -\frac{c\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} k^2 \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{m} \quad (41)$$