Karsten Donnay (kdonnay@ph.tum.de) **Musterlösung Blatt 3**

Ferienkurs Elektrodynamik - SS 2008

1 Polarisierte Kugel

Eine Kugel mit Radius R trage ausschließlich eine Polarisation

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = k\,\boldsymbol{r} \tag{1}$$

wobei k eine Konstante und $\boldsymbol{r}$ der Vektor vom Kugelmittelpunkt ist.

(a) Berechnen Sie die gebundenen Ladungen σ_b und ρ_b.

(b) Bestimmen Sie das Feld innerhalb und außerhalb der Kugel.

Lösungsvorschlag

(a) Aus der Definition von σ_b und der Radialsymmetrie der Polarisation erhalten wir sofort

$$\sigma_b = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n} = k\,R \tag{2}$$

Wir verwenden die Divergenz in Kugelkoordinaten (nur der Radialteil trägt bei wegen der Radialsymmetrie von $\boldsymbol{P}$) und erhalten

$$\rho_b = -\nabla\,\boldsymbol{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,k\,r) = -3\,k \tag{3}$$

(b) Hier müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

$r < R$: Die Ladungsdichte im Inneren der Kugel ist homogen und damit können wir das Feld einfach aus dem Gauß'schen Satz berechnen. Wir verwenden dabei, dass $\boldsymbol{E}$ aus Symmetriegründen nur in Radialrichtung zeigen kann und entlang der Integrationsoberfläche konstant ist:

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{A} = E_r\,4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\,Q_{enc} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3r\rho_b = -\frac{3\,k}{\varepsilon_0}\frac{4\pi r^3}{3} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E} = -\frac{k\,r}{\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{e}}_r \tag{5}$$

$r > R$: Die Gesamtladung der Kugel ist

$$Q_{tot} = \sigma_b\,4\pi R^2 + \rho_b\frac{4\pi R^3}{3} = (k\,R)\,(4\pi R^2) + (-3\,k)\,(\frac{4\pi R^3}{3}) = 0 \tag{6}$$

und damit ist hier $\boldsymbol{E} \equiv 0$.

2 Dielektrische Kugel

Eine Kugel mit Radius R aus einem linearen dielektrischen Material mit relativer Dielektrizitätskonstante ε_r sei im Inneren von einer homogene freien Ladungsdichte ρ_f durchsetzt. Berechnen Sie das Potential im Zentrum der Kugel (relativ zu $r = \infty$).

Lösungsvorschlag

In einem linearen Dielektrikum gilt $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}$. Wir berechnen zuerst das $\boldsymbol{E}$-Feld und unterscheiden dabei zwei Fälle:
$r < R$: Aufgrund der Radialsymmetrie können wir das Feld einfach aus dem Gauß'schen Satz berechnen (denn $\nabla \times \boldsymbol{D} = 0$) mit den freien Ladungen als Quellen des $\boldsymbol{D}$-Feldes. Wir verwenden dabei, dass $\boldsymbol{D}$ (und $\boldsymbol{E}$) aus Symmetriegründen nur in Radialrichtung zeigen kann und entlang der Integrationsoberfläche konstant ist:

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{A} = D\, 4\pi r^2 = Q_{f,enc} = \int_V d^3r \rho_f = \rho_f \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \Rightarrow D = \frac{1}{3}\, \rho_f\, r \tag{7}$$

und damit

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_f\, r}{3\,\varepsilon}\, \hat{\boldsymbol{e}}_r \tag{8}$$

$r > R$: Das Vorgehen ist völlig analog zum ersten Fall, nur bei der Berechnung von Q_{enc} muss man aufpassen:

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{A} = D\, 4\pi r^2 = Q_{enc} = \int_V d^3r \rho_f = \rho_f \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \Rightarrow D = \frac{\rho_f\, R^3}{3\, r^2} \tag{9}$$

und damit

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_f\, R^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2}\, \hat{\boldsymbol{e}}_r \tag{10}$$

Das gesuchte Potential ergibt sich nun durch Integration:

$$V = -\int_\infty^0 \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{r} = -\int_R^0 dr\, \frac{\rho_f\, r}{3\,\varepsilon} - \int_\infty^R dr\, \frac{\rho_f\, R^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2} = \frac{\rho_f}{3\,\varepsilon}\, \frac{R^2}{2} + \frac{\rho_f\, R^2}{3\,\varepsilon_0} = \frac{\rho_f\, R^2}{3\,\varepsilon_0}\, (1 + \frac{1}{2\,\varepsilon_r}) \tag{11}$$

3 Gefüllter Plattenkondensator

Ein Plattenkondensator sei vollständig mit zwei Schichten verschiedener linearer Dielektrika gefüllt. Beide Schichten haben die Dicke a. Die obere Schicht habe die relative Dielektrizitätskonstante 2, die untere die relative Dielektrizitätskonstante 1,5. Weiterhin habe die obere Kondensatorplatte eine freie Oberflächenladungsdichte von $+\sigma_f$ und die untere Kondensatorplatte von $-\sigma_f$.

(a) Berechnen Sie $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{E}$ in beiden Schichten.

(b) Was ist jeweils die Polarisation $\boldsymbol{P}$ in den Schichten?

(c) Berechnen Sie die Potentialdifferenz zwischen den Kondensatorplatten.

(d) Was sind jeweils die gebundenen Ladungen und wo befinden sie sich?

Lösungsvorschlag

Sei die obere Schicht aus dielektrischem Material Schicht 1 und die untere Schicht 2. Wir wählen die z-Achse unseres Koordinatensystems so, dass diese rechtwinklig auf den Schichten bzw. Kondensatorplatten steht und nach unten zeigt.

(a) In den Kondensatorplatten gilt jeweils $\boldsymbol{E} \equiv 0$ (bzw.$\boldsymbol{D} \equiv 0$). Wegen der planaren Symmetrie kann $\boldsymbol{D}$ nur gerade nach oben oder nach unten zeigen. Aufgrund der Stetigkeitsbedingung des $\boldsymbol{D}$-Feldes wissen wir damit sofort, dass

$$\sigma_f = (\boldsymbol{D}_{Kondensator} - \boldsymbol{D}_1)\,\hat{n} = -\boldsymbol{D}_1\,\hat{n} = D_{n,1} \tag{12}$$

wobei wir die Richtung von $\boldsymbol{D}_1$ entlang $\hat{\boldsymbol{e}}_z$ gewählt haben ($\hat{n}$ zeigt in $-\hat{\boldsymbol{e}}_z$-Richtung).
Analog folgt für Schicht 2 aus der Stetigkeitsbedingung an der unteren Kondensatorplatte:

$$-\sigma_f = (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_{Kondensator})\,\hat{n} = \boldsymbol{D}_2\,\hat{n} = --\,D_{n,2} \tag{13}$$

wobei wir die Richtung von $\boldsymbol{D}_2$ ebenfalls entlang $\hat{\boldsymbol{e}}_z$ gewählt haben.
Wir haben also,

$$\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}_2 = \sigma_f\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{14}$$

Die Stetigkeitsbedingung zwischen den Dielektrika ist ebenfalls erfüllt. Damit erhalten wir für $\boldsymbol{E}_1$

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_1}\hat{\boldsymbol{e}}_z = \frac{\sigma_f}{2\,\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{15}$$

und analog

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_2}\hat{\boldsymbol{e}}_z = \frac{2\,\sigma_f}{3\,\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{16}$$

(b) In einem linearen Dielektrikum gilt $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0\,\chi_e\,\boldsymbol{E}$, wobei $\chi_e = \varepsilon_r - 1$, und damit ist die Polarisation in Schicht 1

$$\boldsymbol{P}_1 = \varepsilon_0\,\chi_e\,\frac{\sigma_f}{2\,\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{e}}_z = \frac{\sigma_f}{2}\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{17}$$

und analog in Schicht 2

$$\boldsymbol{P}_2 = \varepsilon_0\,\chi_e\,\frac{2\sigma_f}{3\,\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{e}}_z = \frac{\sigma_f}{3}\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{18}$$

(c) Die Potentialdifferenz errechnet sich aufgrund der planaren Geometrie einfach aus

$$V = E_1\,a + E_2\,a = \frac{7\,\sigma_f\,a}{6\,\varepsilon_0} \tag{19}$$

(d) Mit $\rho_b = -\nabla\boldsymbol{P}$ und den Ergebnissen aus (b) folgt sofort, dass $\rho_b = 0$ in beiden Dielektrika.
Die gebundene Oberflächenladungsdichte ist gegeben durch $\sigma_b = \boldsymbol{P}\,\hat{n}$, wobei $\hat{n}$ jeweils der nach außen zeigende Normalenvektor der betrachteten Fläche ist.
An der Grenzfläche von Schicht 1 zur oberen Kondensatorplatte gilt damit:

$$\sigma_b = \boldsymbol{P}_1\,\hat{n} = -P_1 = -\frac{\sigma_f}{2} \tag{20}$$

An der Unterkante von Schicht 1 ist dann

$$\sigma_b = \boldsymbol{P}_1\,\hat{n} = P_1 = \frac{\sigma_f}{2} \tag{21}$$

Analog gilt an der Oberkante von Schicht 2

$$\sigma_b = \boldsymbol{P}_2\,\hat{n} = -P_2 = -\frac{\sigma_f}{3} \tag{22}$$

und an der Unterkante von Schicht 2 an der Grenzfläche zur unteren Kondensatorplatte

$$\sigma_b = \boldsymbol{P}_2\,\hat{n} = P_2 = \frac{\sigma_f}{2} \tag{23}$$

4 Koaxialkabel

Ein Koaxialkabel besteht aus zwei (unterschiedlich großen) sehr langen und dünnen zylindrischen Leitern, die durch ein lineares magnetisches Material mit Suszeptibilität χ_m voneinander getrennt sind. Der Strom fließt durch den inneren Leiter in eine Richtung und durch den äußeren Leiter zurück; in beiden Fällen verteilt sich der Strom gleichmäßig über die Zylinderoberflächen.

(a) Berechnen Sie das Feld im Inneren des magnetischen Materials, das die beiden Leiter voneinander trennt.

(b) Berechnen Sie die Magnetisierung und die gebundenen Ströme. Verifizieren Sie damit Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe (a).

Lösungsvorschlag

Wir wählen unser Koordinatensystem so, dass die z-Achse entlang der Zylinderachse liegt. Sei s der radiale Abstand zur Achse, $\hat{\boldsymbol{e}}_s$ der radiale Einheitsvektor und $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ der polare Einheitsvektor. Der innere Zylinder habe den Radius a der äußere den Radius b.

(a) Aufgrund der radialen Symmetrie des Problems (also $\nabla \boldsymbol{H} = 0$) können wir $\boldsymbol{H}$ direkt aus der integralen Form von $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_f$ bestimmen. Ebenfalls wegen der Radialsymmetrie kann $\boldsymbol{H}$ nur in $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$-Richtung zeigen:

$$\int \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = 2\pi\, s\, H = \int \boldsymbol{j}_f\, d\boldsymbol{A} = I_{f,enc} = I \qquad (a < s < b) \tag{24}$$

das letzte Gleichheitszeichen gilt, da sich der Strom gleichmäßig über die Oberfläche verteilt. Welche Oberfläche wir hier betrachten ist für die obige Betrachtung egal, da ja der Betrag des Stromes in beiden Leitern identisch ist.
Wir erhalten im Dielektrikum somit

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi\, s}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \tag{25}$$

Und damit

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\,(1+\chi_m)\boldsymbol{H} = \mu_0\,(1+\chi_m)\,\frac{I}{2\pi\, s}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \tag{26}$$

Bemerkung:
Außerhalb des Dielektrikums, also für $0 < s < a$ und $s > b$, gilt $I_{f,enc} = I - I = 0$ und somit $\boldsymbol{H} = 0$ und damit auch $\boldsymbol{B} = 0$.

(b) Die Magnetisierung ergibt sich aus $\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}$ zu

$$\boldsymbol{M} = \frac{\chi_m\, I}{2\pi\, s}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \tag{27}$$

Es ist nun $\boldsymbol{j}_b = \nabla \times \boldsymbol{M}$, aufgrund der polaren Symmetrie gibt es dort jedoch nur eine Beitrag in $\hat{\boldsymbol{e}}_z$-Richtung, der jedoch auch verschwindet:

$$\boldsymbol{j}_b = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\Big(s\frac{\chi_m\, I}{2\pi\, s}\Big)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z = 0 \tag{28}$$

Die gebundene Linienstromdichte $\boldsymbol{k}_b = \boldsymbol{M} \times \hat{n}$ ist für den inneren Zylinder ($s = a$)

$$\boldsymbol{k}_b = \boldsymbol{M} \times (-\hat{\boldsymbol{e}}_s) = \frac{\chi_m\, I}{2\pi\, a}\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{29}$$

und für den äußeren Zylinder ($s = b$) gilt entsprechend

$$\boldsymbol{k}_b = \boldsymbol{M} \times \hat{\boldsymbol{e}}_s = -\frac{\chi_m\, I}{2\pi\, b}\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{30}$$

Da wir nun alle gebundenen Ströme kennen, erhalten wir direkt mit dem Amperschen Gesetz

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{l} = B\, 2\pi\, s = \mu_0 \int \boldsymbol{j}_{tot}\, d\boldsymbol{A} = \mu_0\, (\int \boldsymbol{j}_f\, d\boldsymbol{A} + \int \nabla \times \boldsymbol{M}\, d\boldsymbol{A}) \\ = \mu_0\, (\int \boldsymbol{j}_f\, d\boldsymbol{A} + \int \boldsymbol{M}\, d\boldsymbol{l}) = \mu_0\, (I + \frac{\chi_m\, I}{2\pi\, a}\, 2\pi\, a) = \mu_0\, (1+\chi_m)\, I\end{aligned} \tag{31}$$

wiederum ist es egal welche der beiden Oberflächen wir dabei betrachten. Damit haben wir wie in (a)

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\, (1+\chi_m)\, \frac{I}{2\pi\, s} \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \tag{32}$$

5 Stromdurchflossenes Kabel

Ein Strom I fließe durch ein langes gerades Kabel mit Radius a. Das Kabel bestehe aus einem homogenen linearen Material (z.B. Kupfer oder Aluminium) mit magnetischer Suszeptibilität χ_m und der Strom sei gleichmäßig verteilt.

(a) Bestimmen Sie das Magnetfeld im Abstand s von der Achse des Kabels.

(b) Berechnen Sie alle gebundenen Ströme. Wie groß ist der Gesamtfluß der gebundenen Ströme durch das Kabel?

Lösungsvorschlag

Wie schon in der vorigen Aufgabe wählen wir unser Koordinatensystem so, dass die z-Achse entlang der Zylinderachse liegt, mit s dem radiale Abstand zur Achse, $\hat{\boldsymbol{e}}_s$ dem radiale Einheitsvektor und $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ dem polare Einheitsvektor. Der Strom fließe entlang der positiven z-Richtung. Aufgrund der Tatsache, dass I gleichmäßig verteilt durch das Material fließt ist $\boldsymbol{k}_f = 0$.

(a) Aufgrund der radialen Symmetrie des Problems (also $\nabla \boldsymbol{H} = 0$) können wir $\boldsymbol{H}$ wieder direkt aus der integralen Form von $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_f$ bestimmen und $\boldsymbol{H}$ zeigt wegen der Radialsymmetrie in $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$-Richtung:

$$\int \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = 2\pi\, s\, H = \int \boldsymbol{j}_f\, d\boldsymbol{A} = \begin{cases} I\, \frac{s^2}{a^2} & (s < a) \\ I & (s > a) \end{cases} \tag{33}$$

wir haben im letzten Schritt verwendet, dass der Strom gleichmäßig verteilt durch das Medium fließt . Damit ist das $\boldsymbol{H}$-Feld

$$\boldsymbol{H} = \begin{cases} \frac{I\, s}{2\pi\, a^2}\, \hat{\boldsymbol{e}}_\phi & (s < a) \\ \frac{I}{2\pi\, s}\, \hat{\boldsymbol{e}}_\phi & (s > a) \end{cases} \tag{34}$$

und folglich mit $\boldsymbol{B} = \mu\, \boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0\, (1+\chi_m)\, I\, s}{2\pi\, a^2}\, \hat{\boldsymbol{e}}_\phi & (s < a) \\ \frac{\mu_0\, I}{2\pi\, s}\, \hat{\boldsymbol{e}}_\phi & (s > a) \end{cases} \tag{35}$$

Aufgrund der Stetigkeitsbedingungen für das $\boldsymbol{H}$- und $\boldsymbol{B}$-Feld sind die obigen Ausdrücke auch für $s = a$ gültig (wir erinnern uns, dass $\boldsymbol{k}_f = 0$).

(b) In einem homogenen linearen Material gilt $\boldsymbol{j}_b = \nabla \times \boldsymbol{M} = \nabla \times (\chi_m\, \boldsymbol{H}) = \chi_m\, \boldsymbol{j}_f$ und wir wissen, dass $\boldsymbol{j}_f = \frac{I}{\pi\, a^2} \hat{\boldsymbol{e}}_z$ (da der Strom gleichmäßig im Medium verteilt fließt), also

$$\boldsymbol{j}_b = \frac{\chi_m\, I}{\pi\, a^2} \hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{36}$$

Weiterhin ist ($\hat{n}$ ist der Normalenvektor auf der Mantelfläche, also in $\hat{\boldsymbol{e}}_s$-Richtung)

$$\boldsymbol{k}_b = \boldsymbol{M} \times \hat{n} = \chi_m \, \boldsymbol{H} \times \hat{n} = \chi_m \, H \, \underbrace{\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \times \hat{\boldsymbol{e}}_s}_{=-\hat{\boldsymbol{e}}_z} = -\frac{\chi_m \, I}{2\pi \, a} \hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{37}$$

Beachte: die Flußrichtung der gebundenen Ströme hängt vom Vorzeichen von χ_m ab, ist also gegensätzlich in paramagnetischen und diamagnetischen Materialien!

Zuletzt betrachten wir noch den Gesamtfluß der gebundenen Ströme durch das Kabel. Er ist einfach die Summe aus dem Volumen- und dem Oberflächenbeitrag

$$\boldsymbol{I}_b = \boldsymbol{j}_b \, (\pi \, a^2) + \boldsymbol{k}_b \, (2\pi \, a) = (\chi_m \, I - \chi_m \, I) \, \hat{\boldsymbol{e}}_z = 0 \tag{38}$$

und er verschwindet, wie man es auch aufgrund der Ladungserhaltung der gebundenen Ladungen erwarten würde.

6 Energie im Dielektrikum

Die zum Aufbau eines Feldes in einem Medium nötige Energie kann aus der Arbeit

$$\delta U_{el}(\boldsymbol{x}) = \int d^3x' \, \delta\rho_f(\boldsymbol{x}') \, V(\boldsymbol{x}') \tag{39}$$

berechnet werden, die in einem bereits bestehenden Potential $V(\boldsymbol{x})$ für eine zusätzliche freie Ladungsdichte $\delta\rho_f(x)$ nötig ist.

(a) Zeigen Sie, dass sich δU_{el} durch ein Volumenintegral des Produktes aus $\boldsymbol{D}$- und $\boldsymbol{E}$-Feld darstellen lässt und geben Sie die Gesamtenergie U_{el} im Dielektrikum für den Fall eines linearen, isotropen Mediums an.

(b) Berechnen Sie die elektrische Energie für eine Anordnung von Leitern ($\boldsymbol{E} \equiv 0$ im Innern), die sich in einem dielektrischen Medium befinden und auf denen freie Ladungen Q_j sitzen, so dass V_j das Potential auf der Oberfläche des Leiters j ist. Zeigen Sie, dass sich mit den über $Q_i = \sum_j C_{ij} \, V_j$ definierten Kapazitätskoeffizienten C_{ij} daraus eine einfache quadratische Form ergibt.

Lösungsvorschlag

(a) Mit $\nabla \boldsymbol{D} = \rho_f$ gilt auch $\nabla \delta \boldsymbol{D} = \delta\rho_f$, außerdem ist $\boldsymbol{E} = -\nabla V$. Einsetzen in den Ausdruck für δU_{el} und anwenden der inversen Produktregel $(\nabla \boldsymbol{A}) f = \nabla(f \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}(\nabla f)$ ergibt

$$\delta U_{el} = \int d^3x \, (\nabla \delta \boldsymbol{D}) \, V = \int d^3x \, \nabla(\delta \boldsymbol{D} \, V) - \int d^3x \, \delta \boldsymbol{D} \, (\nabla V) = \underbrace{\int_{\partial V} d\boldsymbol{A} \, \delta \boldsymbol{D} \, V}_{=0} + \int d^3x \, \delta \boldsymbol{D} \, \boldsymbol{E} \tag{40}$$

In einem linearen, isotropen Medium gilt $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ und damit

$$\begin{aligned} \delta U_{el} &= \varepsilon \int d^3x \, \delta \boldsymbol{E} \, \boldsymbol{E} = \varepsilon \int d^3x \sum_{i=1}^{3} \int_0^{E_i(\boldsymbol{x})} E_i(\boldsymbol{x}) \, dE_i(\boldsymbol{x}) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \int d^3x \, (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}))^2 = \frac{1}{2} \int d^3x \, \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) \, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{41}$$

(b) Wir leiten zuerst einen Ausdruck für U_{el} her, der nur von der freien Ladungsdichte und dem Potential abhängt:

$$\begin{aligned} U_{el} &= \frac{1}{2}\int d^3x\, \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\int d^3x\, \boldsymbol{D}\,(-\nabla V) = \frac{1}{2}\int d^3x (\nabla \boldsymbol{D})\, V - \underbrace{\frac{1}{2}\int d^3x\, \nabla(\boldsymbol{D}\, V)}_{=0} \\ &= \frac{1}{2}\int d^3x\, \rho_f\, V(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{42}$$

Sei $\mathfrak{V}_i$ das Volumen des Leiters i, dann gilt für $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{V}_i$, dass $V(\boldsymbol{x}) = V_i$ (da Leiter überall das gleiche Potential haben) . Außerdem ist $\rho_f(\boldsymbol{x}) = 0$ für alle $\boldsymbol{x} \notin \bigcup \mathfrak{V}_i$ und damit

$$U_{el} = \frac{1}{2}\sum_i V_i \int_{\mathfrak{V}_i} d^3x\, \rho_f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\sum_i V_i\, Q_i = \sum_{ij} \frac{1}{2}\, C_{ij}\, V_i\, V_j \tag{43}$$