

1 Statische elektromagnetische Felder in Medien

In einem Medium bestimmen die Ladungs- und Stromverteilung auf atomarer Skala die elektromagnetischen Felder, d.h. $\rho_{micro}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{j}_{micro}(\mathbf{x})$ werden durch die Elektronen und Atomkerne erzeugt. ρ_{micro} und \mathbf{j}_{micro} sind nur im *Zeitmittel* statisch (in der Quantenmechanik entspricht dies stationären Zuständen). Die statischen **Maxwellgleichungen** gelten zuerst einmal auf mikroskopischer Skala:

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{E}_{micro}(\mathbf{x}) &= \rho_{micro}(\mathbf{x})/\varepsilon_0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_{micro}(\mathbf{x}) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}_{micro}(\mathbf{x}) &= \mu_0 \mathbf{j}_{micro}(\mathbf{x}) \\ \nabla \mathbf{B}_{micro}(\mathbf{x}) &= 0\end{aligned}$$

Die genauen mikroskopischen Verteilungen ρ_{micro} und \mathbf{j}_{micro} sind unglaublich kompliziert: ist man z.B. in der Nähe eines Elektrons, dann ist das Feld riesig, ein kleines Stück weiter könnte es aber schon wieder sehr, sehr klein sein und in eine ganz andere Richtung zeigen. Außerdem ändert sich durch die Eigenbewegung der Atome ständig ihre Konfiguration und damit das Feld.

Damit ist es fast unmöglich das genaue mikroskopische Feld zu berechnen und es ist auch nicht sinnvoll: das physikalisch relevante Feld ist das über ein kleines Volumen ΔV *gemittelte* Feld ($\Delta V \approx (10 \text{ nm})^3$, enthält typischerweise 10^6 Atome), das genug Atome enthält um einen glatten Verlauf von \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Feld zu garantieren aber trotzdem klein genug ist, um alle wichtigen größeren Variationen der Felder zu erfassen:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}) &\equiv \frac{1}{\Delta V} \int d^3x' \mathbf{E}_{micro}(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) &\equiv \frac{1}{\Delta V} \int d^3x' \mathbf{B}_{micro}(\mathbf{x} + \mathbf{x}')\end{aligned}$$

Dementsprechend betrachtet man die **ortsgemittelten mikroskopischen**

Maxwellgleichungen ($\langle \cdot \rangle \equiv$ Ortsmittel):

$$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \langle \rho_{micro} \rangle(\mathbf{x}) / \epsilon_0 \quad (M1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0 \quad (M2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \langle \mathbf{j}_{micro} \rangle(\mathbf{x}) \quad (M3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0 \quad (M4)$$

Man benötigt nun materialspezifische Ansätze für $\langle \rho_{micro} \rangle$ und $\langle \mathbf{j}_{micro} \rangle$.

1.1 Statische elektrische Felder in Medien

Wir müssen nun zwei Arten von Medien unterscheiden: (ideale) **Leiter** und **Nichtleiter**.

Im Inneren von (idealen) Leitern ist $\mathbf{E} = 0$, da sich in einem von außen angelegten Feld die Ladungsträger so lange umverteilen bis die induzierten Ladungen komplett das Feld im Inneren aufheben. Damit folgt im Inneren des (idealen) Leiters mit (M1) auch sofort $\langle \rho_{micro} \rangle = 0$. Die einzige nicht-verschwindende Ladungsdichte befindet sich an der Oberfläche des Leiters.

Die Eigenschaften von Leitern wurden schon im Detail in der vorigen Vorlesung besprochen, weshalb wir uns nun direkt dem Fall der **Nichtleiter** (oder Dielektrika) zuwenden. In Nichtleitern werden die neutralen Atome und Moleküle im elektrischen Feld polarisiert, d.h. die Ladungen der Elektronen und Atomkerne bzw. die Ladungsschwerpunkte der Moleküle werden gegeneinander verschoben und damit (in führender Ordnung) lokale Dipolmomente induziert:

$$\mathbf{p} = \bar{\alpha} \mathbf{E} \quad (1)$$

mit $\bar{\alpha}$: Polarisierbarkeit, i.A. eine tensorielle Größe. Dies führt zu einer makroskopischen Polarisation des Mediums:

$$\mathbf{P} = \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{V} \quad (2)$$

(Für eine ausführlichere Einführung zum Thema Polarisation sind S. 160-166 in Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, zu empfehlen.)

Ausgehend vom Feld eines elektrischen Dipols

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (3)$$

können wir das Feld eines polarisierten Objektes berechnen, wobei $\mathbf{p} = \mathbf{P} d^3x$ als mittleres Dipolmoment in jedem Volumenelement d^3x verstanden wird:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (4)$$

Wir dürfen an dieser Stelle das Feld eines elektrischen Dipols verwenden, denn wir interessieren uns ja nur für das mittlere Dipolmoment in einem genügend kleinen Volumen (siehe Diskussion zu Anfang der Vorlesung). Im Rahmen dieser Betrachtungsweise ist es egal ob wir einen tatsächlichen reinen Dipol oder einen 'physikalischen' Dipol betrachten, denn unsere Ortsmittelung war genauso gewählt, dass der 'physikalische Dipol' alle relevanten Informationen über das makroskopische Feld enthält.

Der Ausdruck (4) lässt sich noch geschickt umschreiben, denn verwendet man $\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} = \nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)$ und die inverse Produktregel $\mathbf{A}(\nabla f) = \nabla(f\mathbf{A}) - f(\nabla\mathbf{A})$, dann ergibt sich

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \nabla\left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} (\nabla\mathbf{P}) \quad (5)$$

Anwendung des Gauß'schen Satzes vereinfacht das erste Integral:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial V} d\mathbf{A}' \mathbf{P} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} (\nabla\mathbf{P}) \quad (6)$$

Den ersten Term identifiziert man als das Feld einer Oberflächenladung, den zweiten als das Feld einer Volumenladung:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial V} dA' \frac{\sigma_b}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho_b}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (7)$$

wobei

$$\sigma_b = \mathbf{P} \hat{n} \quad \rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (8)$$

Die Ladungen σ_b und ρ_b sind nicht nur ein mathematisches Konstrukt zur Beschreibung der makroskopischen Auswirkung der Polarisation, sondern sie entsprechen tatsächlichen (gebundenen) Ladungsverteilungen im Dielektrikum! (Ein ausführlichere Erläuterung dazu wird z.B. in Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, auf S. 170/171 gegeben.)

Der Allgemeine Ansatz für die ortsgemittelte Ladungsdichte im Inneren eines Dielektrikums ist damit:

$$\langle \rho_{micro} \rangle = \rho_f + \rho_b \quad (9)$$

wobei ρ_f die externe freie Ladungsdichte und ρ_b die oben berechnete Polarisationsladung von gebundenen Teilchen ist.

Verwendet man diesen Ansatz in (M1) so erhält man:

$$\varepsilon_0 \nabla \mathbf{E} = \langle \rho_{micro} \rangle = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \mathbf{P} \quad (10)$$

$$\Rightarrow \nabla(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f \quad (11)$$

Damit liegt es nahe die **dielektrische Verschiebung** \mathbf{D} zu definieren,

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (12)$$

wobei \mathbf{D} nur die freien Ladungen als Quellen hat

$$\nabla \mathbf{D} = \rho_f. \quad (13)$$

Aber **Vorsicht!** Es genügt i.A. nicht bei der Lösung eines Problems nur die freien Ladungsträger zu betrachten und \mathbf{D} analog den Methoden für \mathbf{E} auszurechnen, denn die Rotation von \mathbf{D} verschwindet nicht zwangsläufig

$$\nabla \times \mathbf{D} = \underbrace{\varepsilon_0 \nabla \times \mathbf{E}}_{=0} + \nabla \times \mathbf{P} = \nabla \times \mathbf{P} \quad (14)$$

d.h. \mathbf{D} lässt sich i.A. nicht als Gradient eines Skalarfeldes darstellen und damit

$$\mathbf{D} \neq \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \rho_f \quad (15)$$

Das ist auch intuitiv schlüssig, da zwar die freien Ladungen die eigentlichen Quellen des Feldes sind aber eben auch zusätzlich die Polarisationsladungen erzeugen. Letzterer Tatsache würde in (15) nicht Rechnung getragen.

Für bestimmte Geometrien, z.B. kugel-, zylindrisch- oder planar-symmetrische, in denen $\nabla \times \mathbf{P} = 0$ verschwindet, kann man natürlich \mathbf{D} vollständig aus den freien Ladungen bestimmen. Das gleiche gilt aber auch für einen völlig mit einem homogenen Dielektrikum gefüllten Raum, denn dort gilt ebenfalls $\nabla \times \mathbf{D} = 0$.

Betrachten wir nun auch noch die **Randbedingungen** für Dielektrika. Die integrale Form von (13) ist

$$\int_{\partial V} \mathbf{D} d\mathbf{A} = Q_{f,enc} \quad (16)$$

Integriert man wiederum entlang eines kleinen geschlossenen Quaders um die Grenzfläche, das so klein ist, dass \mathbf{E} nicht variiert, und dessen Höhe $h \rightarrow 0$, dann erhält man

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} A = \sigma_f A \quad \rightarrow \quad D_{n,2} - D_{n,1} = \sigma_f \quad (17)$$

d.h. die Normalkomponente des \mathbf{D} -Feldes ist unstetig um den Betrag der freien Oberflächenladungsdichte.

Aus der integralen Form der zweiten Maxwellgleichung (M2) (verwende den Satz von Stokes)

$$\int_{\gamma} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0 \quad (18)$$

erhält man nach Integration entlang einer Schleife (mit $h \rightarrow 0$) durch beide Medien entlang der Grenzfläche

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E_{t,2} = E_{t,1} \quad (19)$$

d.h. die Tangentialkomponente des \mathbf{E} -Feldes ist stetig.

Wir haben bisher noch nicht spezifiziert wie für ein konkretes *Materiemodell* die Polarisation $\mathbf{P} = \mathbf{P}[\mathbf{E}]$ tatsächlich aussieht. Das einfachste Modell ist das eines **linearen, isotropen Mediums**, d.h.

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \chi_{el} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \quad (20)$$

mit χ_{el} der dimensionslosen *elektrischen Suszeptibilität*. Für ein lineares (nicht-isotropes) Medium ist die elektrische Suszeptibilität i.A. eine tensorielle Größe.

Nicht-lineare Materialien - also solche für die es keinen rein linearen Zusammenhang zwischen \mathbf{P} und \mathbf{E} gibt (z.B. einen weiteren kubischen Term in (20)) - spielen inzwischen eine wichtige Rolle für moderne optische Anwendungen. Wir beschränken uns hier aber auf den Fall eines linearen, isotropen Mediums.

Mit (20) können wir sofort unsere dielektrische Verschiebung wie folgt umschreiben:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \underbrace{(1 + \chi_{el})}_{\equiv \varepsilon_r} \mathbf{E} \equiv \varepsilon \mathbf{E} \quad (21)$$

wobei ε_r die *relative Dielektrizitätskonstante* und ε die **Dielektrizitätskonstante** des Mediums ist.

Es liegt nahe zu vermuten, dass im Fall eines linearen, isotropen Mediums wegen dem einfachen linearen Zusammenhang zwischen \mathbf{D} und \mathbf{E} , \mathbf{D} vollständig gemäß (15) zu bestimmen ist. Dem ist jedoch **nicht** so. Betrachte dazu z.B. die Grenzfläche Medium/Vakuum: es ist $\mathbf{P} \equiv 0$ im Vakuum und $\mathbf{P} \neq 0$, dann gilt

$$\int \nabla \times \mathbf{P} d\mathbf{A} = \int_{\gamma} \mathbf{P} d\mathbf{l} \neq 0 \quad (22)$$

und damit ist $\nabla \times \mathbf{P}$ nicht global gleich Null.

1.2 Statische magnetische Felder in Medien

Ähnlich dem elektrostatischen Fall müssen wir auch hier verschiedene Arten von Medien unterscheiden, z.B. diamagnetische, paramagnetische, ferromagnetische, anti-ferromagnetische etc. Medien. Den verschiedenen Medienarten von Magnetismus ist gemein, dass sie durch bewegte Ladungen - mikroskopische Kreisströme $\langle \mathbf{j}_{micro} \rangle$ - entstehen; ihr Verhalten wird durch (M3) und (M4), also die ortsgemittelten mikroskopischen Maxwellgleichungen, bestimmt.

Der dominante Beitrag dieser Kreisströme wird durch das magnetische Dipolmoment \mathbf{m} charakterisiert und es genügt auch hier völlig analog zu 1.1 immer nur die durch $\langle \mathbf{j}_{micro} \rangle$ erzeugten 'physikalischen' Dipole zu betrachten.

Wir werden an dieser Stelle auf klassische Erklärungsmodelle für die verschiedenen Arten von Magnetismus verzichten, da diese zumeist sehr unbefriedigend sind, und verweisen auf die Festkörpervorlesung im kommenden Jahr für die quantenmechanischen Erklärungsmodelle (wer darauf nicht warten möchte findet auf <http://www.wmi.badw.de/teaching/Lecturenotes/> den Vorlesungsskript von Prof. Gross, einer Standardeinführung in die Festkörperphysik; Kapitel 12 behandelt Magnetismus).

Hier beschränken wir uns darauf mit den Ergebnissen der klassischen Theorien magnetische Materialien anhand ihrer Suszeptibilität zu charakterisieren.

Analog zur makroskopischen Polarisation eines Mediums definieren wir eine makroskopische Magnetisierung

$$\mathbf{M} = \frac{\langle \mathbf{m} \rangle}{V} \quad (23)$$

und berechnen ausgehend vom Feld eines magnetischen Dipols

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (24)$$

das Feld eines magnetisch polarisierten Mediums, wobei wiederum $\mathbf{m} = \mathbf{M} d^3x$ als mittleres Dipolmoment in jedem Volumenelement d^3x verstanden wird:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (25)$$

wir verwenden den gleichen 'Trick' wie in 1.1, benutzen die inverse Produktregel für das Kreuzprodukt $\mathbf{U} \times (\nabla f) = \nabla \times (f\mathbf{U}) - f(\nabla \times \mathbf{U})$ und

$$\int_V d^3x \nabla \times \mathbf{U} = - \int_{\partial V} \mathbf{U} \times d\mathbf{A}, \quad (26)$$

dann vereinfacht sich (25) zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial V} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times d\mathbf{A}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (27)$$

Den ersten Term identifiziert man analog zu 1.1 als das Feld einer Volumenstroms, den zweiten als das Feld eines Oberflächenstroms:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{j}_b}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial V} \frac{\mathbf{k}_b}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dA' \quad (28)$$

wobei

$$\mathbf{j}_b = \nabla \times \mathbf{M} \quad \mathbf{k}_b = \mathbf{M} \times \hat{n} \quad (29)$$

Wiederum sind \mathbf{j}_b und \mathbf{k}_b tatsächliche gebundene Ströme im Medium und nicht nur ein mathematisches Konstrukt (siehe dazu auch Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, S. 266-268).

Der Allgemeine Ansatz für die ortsgemittelte Stromdichte im Inneren eines Mediums ist damit:

$$\langle \mathbf{j}_{micro} \rangle = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_b \quad (30)$$

wobei \mathbf{j}_f die externe freie Stromdichte und \mathbf{j}_b die oben berechnete Stromdichte der gebundenen Ströme ist.

Verwendet man diesen Ansatz in (M3), dann erhält man:

$$\frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) = \langle \mathbf{j}_{micro} \rangle = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_b = \mathbf{j}_f + \nabla \times \mathbf{M} \quad (31)$$

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j}_f \quad (32)$$

Man definiert nun das **H-Feld**,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (33)$$

wobei die Rotation von **H** alleine durch die freie Stromdichte charakterisiert wird

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f. \quad (34)$$

Aber auch hier **Vorsicht!** Es genügt i.A. wiederum nicht nicht bei der Lösung eines Problems nur die freie Stromdichte zu betrachten und **H** analog zu **B** zu berechnen, denn **H** ist i.A. kein reines Rotationsfeld

$$\nabla \mathbf{H} = \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \nabla \mathbf{B}}_{=0} - \nabla \mathbf{M} = -\nabla \mathbf{M} \neq 0 \quad (35)$$

Die intuitive Erklärung ist hier wiederum, dass zwar die freien Ströme die Rotation des Feldes bestimmen aber eben auch zusätzlich die gebundenen Ströme im Medium erzeugen.

Wie schon im vorigen Kapitel betrachten wir noch die **Randbedingungen** für magnetische Medien.

Aus der integralen Form von (M4) (verwende den Satz von Gauss)

$$\int_{\partial V} \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0 \quad (36)$$

erhält man durch Integration entlang eines kleinen geschlossenen Quaders um die Grenzfläche, das so klein ist, dass **B** nicht variiert, und dessen Höhe $h \rightarrow 0$, dann erhält man

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} A = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{B}_{n,2} = \mathbf{B}_{n,1} \quad (37)$$

d.h. die Normalkomponente des \mathbf{B} -Feldes ist stetig.

Die integrale Form von (34) ist (verwende den Satz von Stokes)

$$\int_{\gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{\partial V} \mathbf{j}_f d\mathbf{A}. \quad (38)$$

Integriert man nun entlang einer Schleife durch beide Medien (mit $h \rightarrow 0$), die senkrecht zu \mathbf{j}_f ist (damit bleibt nur der Beitrag der Oberflächenstromdichte), dann gilt

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \mathbf{t} = k_f \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_{t,2} - \mathbf{H}_{t,1} = k_f \quad (39)$$

d.h. die Tangentialkomponente des \mathbf{H} -Feldes ist unstetig um den Betrag der Oberflächenstromdichte.

Wir müssen nun wieder ein konkretes *Materiemodell* für die Magnetisierung $\mathbf{M} = \mathbf{M}[\mathbf{H}]$ spezifizieren. Das einfachste Modell ist wiederum das eines **linearen, isotropen Mediums**, d.h.

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \chi_m \mathbf{H}(\mathbf{x}) \quad (40)$$

mit χ_m als dimensionsloser *magnetischer Suszeptibilität*.

Mit (40) können wir wiederum das \mathbf{B} -Feld wie folgt umschreiben:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_m)}_{\equiv \mu_r} \mathbf{H} \equiv \mu \mathbf{H} \quad (41)$$

wobei μ_r die *relative magnetische Permeabilität* und μ die **magnetische Permeabilität** ist.

Für $\chi_m > 0$ richtet sich die Magnetisierung parallel zum \mathbf{B} -Feld aus und man spricht von **paramagnetischen** Medien, dagegen richtet sich für $\chi_m < 0$ die Magnetisierung antiparallel aus und man erhält **diamagnetische** Medien. Der Extremfall eines Diamagneten ist $\chi_m = -1$, dann ist $\mathbf{B} \equiv 0$ im Inneren des Mediums.

Auch in linearen magnetischen Medien genügt (34) nicht um \mathbf{H} zu bestimmen. Dies liegt wiederum daran, dass an der Grenzfläche zwischen zwei Medien $\int \mathbf{M} d\mathbf{A} \neq 0$ und damit $\nabla \mathbf{M}$ nicht überall verschwindet.

1.3 Energie von Feldern in Materie

An dieser Stelle können wir nur die Energie von elektrischen Feldern in Materie herleiten, die formal korrekte Herleitung der magnetischen Felder

erfordert das Induktionsgesetz und damit Elektrodynamik.

Der allgemeine Ausdruck für die Energie in einem elektrostatischen System im Vakuum ist

$$U_{el}(\mathbf{x}) = \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') V(\mathbf{x}') = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3x' E^2(\mathbf{x}') \quad (42)$$

Stellen wir uns vor, dass man Stück für Stück durch Einbringen von freier Ladung im Inneren eines Dielektrikums ein elektrisches Feld aufbaut. Zu Beginn ist die Feldenergie Null, die Änderung der freien Ladungsdichte $\rho_f \rightarrow \rho_f + \delta\rho_f$ im Dielektrikum erhöht dann stückweise die Feldenergie um

$$\delta U_{el}(\mathbf{x}) = \int d^3x' \delta\rho_f(\mathbf{x}') V(\mathbf{x}') \quad (43)$$

Für ein lineares Dielektrikum erhält man nach Manipulation der Ausdrücke in (43) und Integration über die infinitesimalen Änderungen

$$U_{el}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int d^3x' \mathbf{D}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}') \quad (44)$$

Die detaillierte Herleitung von (44) ist eine Teilaufgabe des heutigen Übungsblattes.