Timon Mehrling (t.mehrling@googlemail.com) **Musterlösung Blatt 2**

Ferienkurs Elektrodynamik - SS 2008

1 Elektrostatisches Feld einer linienförmigen Ladungsverteilung

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Satzes das elektrische Feld einer ruhenden Ladungsverteilung, die homogen entlang der z-Achse konzentriert ist. Die Längenladungsdichte sei Q.

Lösungsvorschlag:

Mit der elektrostatischen Maxwellgleichung

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\,\rho(\vec{r}) \tag{1}$$

folgt

$$\int_V dV \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) = \int_V dV \frac{1}{\epsilon_0}\,\rho(\vec{r}) \tag{2}$$

Wir wenden den Gaußschen Satz an:

$$\int_V dV \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) = \int_{\delta V} d\vec{f} \cdot \vec{E} \tag{3}$$

und erhalten

$$\int_{\delta V} d\vec{f} \cdot \vec{E} = \int_V dV \frac{1}{\epsilon_0}\,\rho(\vec{r}) \tag{4}$$

$$2\pi\, r\, E_r \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz = \frac{1}{\epsilon_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\; \rho(\vec{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \tag{5}$$

Hieraus folgt für das elektrische Feld:

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}\,\hat{e}_r \tag{6}$$

2 Homogen geladene Vollkugel

Wir betrachten eine gleichmäßig geladene Vollkugel mit Radius R und Ladung Q.

(a) Berechnen Sie das elektrostatische Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0} \int d^3r' \,\frac{\rho(\vec{r'})}{|\,\vec{r} - \vec{r}\,'\,|}$$

der Kugel im Innen- und Außenraum, wobei das Potential im Unendlichen verschwinden soll.
Hinweis: Nutzen Sie bei der Wahl des Beobachtungspunktes die Kugelsymmetrie des Problems aus.

(b) Bestimmen Sie daraus das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im Innen- und Außenraum.

(c) Skizzieren Sie das Potential.

Lösungsvorschlag:

(a) Die Ladungsdichte ist konstant und beträgt $\rho_0 = Q/V$, wobei $V = 4/3\pi R^3$.
Wir rechnen also:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\,\epsilon_0} \int_0^R dr' r'^2 \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-1}^{1} d\cos\theta' \frac{1}{|\,\vec{r} - \vec{r}\,'\,|} \,. \tag{7}$$

Wir wählen den Beobachtungspunkt nun so, dass $\theta = 0$ und erhalten

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{2\,\epsilon_0} \int_0^R dr' r'^2 \int_{-1}^{1} d\cos\theta' \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\,r\,r'\cos\theta'}} \tag{8}$$

$$= \frac{\rho_0}{2\,r\,\epsilon_0} \int_0^R dr' r' (-1) \left.\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\,r\,r'\,\cos\theta'}\right|_{\cos\theta'=-1}^{1} \tag{9}$$

$$= \frac{\rho_0}{2\,r\,\epsilon_0} \int_0^R dr' r' \left(\sqrt{(r^2 + r'^2)^2} - \sqrt{(r^2 - r'^2)^2} \right) \tag{10}$$

$$= \frac{\rho_0}{2\,r\,\epsilon_0} \int_0^R dr' r' \left(|r + r'| - |r - r'| \right) \,. \tag{11}$$

Nun muss man die Fälle $r > R$ und $r \leq R$ getrennt behandeln:

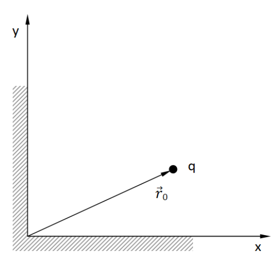
$$\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{r\,\epsilon_0} \left(\int_0^r dr' r'^2 + r \int_r^R dr' r' \right) = \frac{\rho_0}{2\,\epsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right) = \frac{Q}{8\pi\,\epsilon_0\,R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) & (r \leq R) \\ \frac{\rho_0}{r\,\epsilon_0} \int_0^R dr' r'^2 = \frac{R^3\,\rho_0}{3\,\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\,\epsilon_0} \frac{1}{r} & (r > R) \end{cases} \tag{12}$$

(b) Das elektrische Feld lautet dann:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\,R^3\,\epsilon_0}\, r\,\hat{e}_r & (r \leq R) \\ \frac{Q}{4\pi\,\epsilon_0} \frac{1}{r^2}\,\hat{e}_r & (r > R) \end{cases} \tag{13}$$

3 Punktladung vor geerdeten Metallplatten

Eine Punktladung q befinde sich vor zwei geerdeten, unendlich ausgedehnten Metallplatten, die in der y-z-Ebene und der x-z-Ebene liegen, wie in der Abbildung dargestellt. Hier sei $\vec{r}_0 = (a, b, 0)$.



(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Spiegelladungsmethode das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ außerhalb der Metallplatten.

(b) Berechnen Sie die Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$ und die Gesamtladung auf den Platten.

(c) Welche Kraft wirkt auf die Punktladung?

Lösungsvorschlag:

(a) Wir gehen zunächst wie in der Vorlesung vor und konstruieren zwei Spiegelladungen an den Orten $\vec{r}_1 = (a, -b, 0)$ und $\vec{r}_2 = (-a, b, 0)$ um die Dirichletsche Randbedingungen $\Phi(\vec{r})|_{x=0} = 0$ und $\Phi(\vec{r})|_{y=0} = 0$ zu erfüllen. Wir erkennen aber, dass eine Spiegelladung dann die jeweils andere Randbedingung verletzt. Es liegt aus Symmetriegründen nahe, nun eine dritte Spiegelladung am Ort $\vec{r}_3 = (-a, -b, 0)$ einzuführen, die Ladung $q_3 = q$ trägt.
Das elektrostatische Potential lautet dann:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_0} \sum_{i=1}^{3} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \qquad (x > 0, y > 0) \tag{14}$$

Und wir können überpüfen, dass die Randbedingungen erfüllt sind.

(b) Die Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$ erhalten wir mit

$$\sigma(\vec{r}) = -\epsilon_0 \left.\frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial n}\right|_{\vec{r}\in R} = \begin{cases} -\epsilon_0 \left.\frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial y}\right|_{y=0} = \sigma(x,z) & (x > 0) \\ -\epsilon_0 \left.\frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial x}\right|_{x=0} = \sigma(y,z) & (y > 0) \end{cases} \tag{15}$$

Damit ergibt sich

$$\sigma(x,z) = -\frac{q\,b}{2\pi}\left(\frac{1}{\left((x-a)^2 + b^2 + z^2\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left((x+a)^2 + b^2 + z^2\right)^{3/2}}\right) \qquad (x > 0) \tag{16}$$

$$\sigma(y,z) = -\frac{q\,a}{2\pi}\left(\frac{1}{\left(a^2 + (y-b)^2 + z^2\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(a^2 + (y+b)^2 + z^2\right)^{3/2}}\right) \qquad (y > 0) \tag{17}$$

Für die gesamte influenzierte Ladung erhält man so auf der $x-z$-Ebene:

$$\begin{aligned} Q^{xz}_{infl} = \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dz\ \sigma(x,z) &= -\frac{q\,b}{2\pi} \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dz \left(\frac{1}{\left((x-a)^2 + b^2 + z^2\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left((x+a)^2 + b^2 + z^2\right)^{3/2}}\right) \\ &= -\frac{q\,b}{\pi} \int_0^\infty dx \left(\frac{1}{(x-a)^2 + b^2} - \frac{1}{(x+a)^2 + b^2}\right) \qquad (18) \\ &= -\frac{q\,b}{\pi} \int_{-a}^{a} dx\ \frac{1}{x^2 + b^2} \qquad (19) \\ &= -\frac{2\,q}{\pi} \arctan\frac{a}{b}\,. \qquad (20) \end{aligned}$$

Hier wurden folgende Identitäten verwendet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{1}{(\alpha + \xi^2)^{3/2}} = \left.\frac{\xi}{\alpha\sqrt{\alpha + \xi^2}}\right|_{\xi=-\infty}^{\infty} = \frac{2}{\alpha}\,; \tag{21}$$

$$\int d\varsigma \frac{1}{(\varsigma^2 + \alpha^2)} = \frac{1}{\alpha} \arctan\left(\frac{\varsigma}{\alpha}\right)\,. \tag{22}$$

Analog erhalten wir für die $y-z$-Ebene:

$$Q_{infl}^{yz} = -\frac{2\,q}{\pi} \arctan\frac{b}{a}\,. \tag{23}$$

Und so ergibt sich für die gesamte influenzierte Ladung:

$$Q_{infl} = Q_{infl}^{xz} + Q_{infl}^{yz} = -\frac{2\,q}{\pi}\left(\arctan\frac{a}{b} + \arctan\frac{b}{a}\right) = -q\,. \tag{24}$$

Man kann ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren, um sich zu veranschaulichen, dass

$$\left(\arctan\frac{a}{b} + \arctan\frac{b}{a}\right) = \frac{\pi}{2} \tag{25}$$

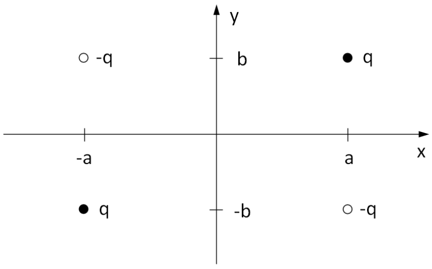
gilt.

(c) Die Kraft auf die Punktladung errechnen wir mit dem Coulombschen Gesetz.

$$\vec{F} = q\sum_{i=0}^{3} q_i \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|} = -\frac{q^2}{4}\left[\left(\frac{1}{a^2} - \frac{a}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right)\hat{e}_x + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{b}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right)\hat{e}_y\right] \tag{26}$$

4 Multipolentwicklung

Wir betrachten die in der Abbildung dargestellte Ladungsverteilung wie sie sich aus Aufgabe 3 ergibt.



(a) Führen Sie eine Multipolentwicklung des Potentials dieser Ladungsverteilung durch. Geben Sie den Quadrupoltensor explizit an.

(b) Welches elektrische Potential ergibt sich damit in großer Entfernung ($r \gg a, b$)?

Lösungsvorschlag:

(a) Die Ladungsverteilung ist gegeben durch:

$$\rho(\vec{r}\,') = q\,\left[\delta(x'-a)\delta(y'-b) + \delta(x'+a)\delta(y'+b) - \delta(x'-a)\delta(y'+b) - \delta(x'+a)\delta(y'-b)\right] \tag{27}$$

Das elektrische Monopolmoment ist null, da die Gesamtladung null ist.
Für das elektrische Dipolmomet ergibt sich ebenfalls:

$$p_x = p_y = q\int d^2r'x'\,\rho(\vec{r}\,') = 0 \tag{28}$$

Für die verschiedenen Komponenten des Quadrupoltensors erhalten wir:

$$Q_{yy} = Q_{xx} = q\int d^2r'(3x^2 - x^2 - y^2)\,\rho(\vec{r}\,') = 0 \tag{29}$$

$$Q_{xy} = Q_{xy} = q\int d^2r'(3xy)\,\rho(\vec{r}\,') = 12ab\,q \tag{30}$$

(b) Für große Entfernungen ergibt sich damit für das Potential:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{3\,a\,b}{\pi\epsilon_0}\,\frac{x\,y}{r^5} \tag{31}$$

5 Rotierende, geladene Kugel

Auf der Oberfläche einer Hohlkugel mit dem Radius R sei die Ladung Q gleichmäßig verteilt. Die Kugel rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

(a) Bestimmen Sie die dadurch erzeugte Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$.

(b) Berechnen Sie das von $\vec{j}(\vec{r})$ hervorgerufene magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$ der Kugel.

(c) Bestimmen Sie daraus das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ außerhalb der Kugel.

Lösungsvorschlag:

(a) Die Ladungsdichte ist gegeben durch:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\,R^2}\delta(r-R) \tag{32}$$

Die Stromdichte ergibt sich dann wie folgt:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\,\vec{v}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\,[\vec{\omega}\times\vec{r}_0] \tag{33}$$

Mit $\vec{r}_0 = R\,\hat{e}_r$. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass: $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_z = \omega(0,0,1)$.
Damit erhalten wir $(\hat{e}_z \times \hat{e}_r = \sin\theta\,\hat{e}_\phi)$:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{Q\,\omega}{4\pi\,R}\,\sin\theta\,\delta(r-R)\,\hat{e}_\phi \tag{34}$$

(b) Das magnetische Dipolmoment kann wie folgt berechnet werden (siehe Vorlesung):

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int d^3r\left(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})\right) \tag{35}$$

Zunächst erkennen wir, dass gilt:

$$(\hat{e}_r\times\hat{e}_\phi) = (\sin\theta\,\cos\phi\,\hat{e}_x + \sin\theta\,\sin\phi\,\hat{e}_y + \cos\theta\,\hat{e}_z)\times(-\sin\phi\,\hat{e}_x + \cos\phi\,\hat{e}_y) = -\hat{e}_\theta \tag{36}$$

Somit können wir schreiben

$$\begin{aligned}
\vec{\mu} &= \frac{Q\,\omega}{8\pi\,R}\int_0^\infty dr\,r^3\,\delta(r-R)\int_0^{2\pi}d\phi\int_{-1}^{1}d\cos\theta\,(-\sin\theta\,\hat{e}_\theta) \qquad (37)\\
&= \frac{Q\,\omega}{8\pi\,R}\int_0^\infty dr\,r^3\,\delta(r-R)\int_0^{2\pi}d\phi\int_{-1}^{1}d\cos\theta\,(-\sin\theta\,\cos\theta\,\cos\phi\,\hat{e}_x - \sin\theta\,\cos\theta\,\sin\phi\,\hat{e}_y + \sin^2\theta\,\hat{e}_z)\\
&= \frac{Q\,\omega\,R^2}{4}\int_{-1}^{1}d\cos\theta\,(1-\cos^2\theta)\hat{e}_z
\end{aligned}$$

Hier wurde für die x- und y-Komponente benutzt, dass $\int_0^{2\pi} d\phi\cos\phi = \int_0^{2\pi} d\phi\sin\phi = 0$.
Wir erhalten so:

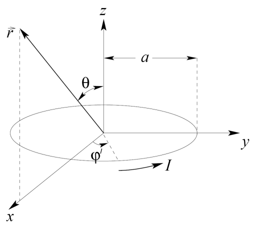
$$\vec{\mu} = \frac{Q\,\omega\,R^2}{3}\hat{e}_z = \frac{Q\,R^2}{3}\,\vec{\omega} \tag{38}$$

(c) Wir benutzen hier die Magnetostatische Multipoentwicklung um das Vektorpotential zu bestimmen (eine Berechnung über Gleichung (2.11) im Script ist viel umfangreicher und liefert das gleiche Ergebnis):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{\mu}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{Q\,R^2\,\mu_0}{12\pi\,r^3}\,(\vec{\omega}\times\vec{r}) \tag{39}$$

6 Vektorpotential eines stromdurchflossenen Ringes (erhöhter Schwierigkeitsgrad)

Ein Kreisstrom I fließt in einem unendlich dünnen Draht, der einen Ring mit Radius a bildet und in der xy-Ebene liegt.



(a) Machen Sie sich klar, dass die Stromdichte in Zylinderkoordinaten gegeben ist durch

$$\vec{j}(\vec{r}\,') = I\,\delta(z')\,\delta(r'-a)\,\hat{e}_{\phi'}\,.$$

(b) Bestätigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung für die Strom- und Ladungsdichte erfüllt ist.
Hinweis: Die Darstellung der Divergenz in Zylinderkoordinaten ist: $\nabla\cdot\vec{V} = 1/r\,\partial_r(r\,V_r) + 1/r\,\partial_\phi V_\phi + \partial_z V_z$

(c) Geben Sie für das vom Strom erzeugte Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ in Coulomb-Eichung eine Integraldarstellung an. Berechnen Sie das Vektorpotential und das Magnetfeld näherungsweise für $r \gg a$.
Hinweis: Da die Symmetrie des Problems zylindersymmetrisch ist, kann man den Beobachtungsounkt $\vec{r}$ in die xz-Ebene legen, um die Rechnung zu vereinfachen. Entwickeln Sie den Integranden in a/r

(d) Wie groß ist das vom Kreisstrom erzeugte magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$?

Lösungsvorschlag:

(a) Klar

(b) Kontinuitätsgleichung

$$\nabla_{r'}\cdot\vec{j}(\vec{r}\,') = \frac{1}{r'}\,\frac{\partial}{\partial\phi}\,(I\,\delta(z')\,\delta(r'-a)) = 0 \tag{40}$$

Wie von der Magnetostatik gefordert verschwindet die Divergenz der Stromdichte.

(c) Wir nutzen zunächst die Zylindersymmetrie aus und legen unseren Beobachtungspunkt in die x-z-Ebene $\Rightarrow \phi = 0$ und untersuchen das Vektorpotential in dieser Ebene. Zur Bestimmung des Vektorpotentials genügt es dann das Integral für $A_y = \cos\phi\,A(r,z)$ zu bestimmen. Wir betrachten deshalb ebenfalls nur die y-Komponente der Stromdichte $j_y = I\,\delta(z')\,\delta(r'-a)\,\cos\phi'$.

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{I\,\delta(z')\,\delta(r'-a)\,\cos\phi'}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|} \tag{41}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\infty} dr'\,\frac{I\,r'\,\delta(z')\,\delta(r'-a)\,\cos\phi'}{\sqrt{r^2+r'^2-2\,r\,r'\,\cos\phi'+(z+z')^2}} \tag{42}$$

$$= \frac{I\,a\,\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi'\,\frac{\cos\phi'}{\sqrt{r^2+a^2-2\,r\,a\,\cos\phi'+z^2}} \tag{43}$$

$$= \frac{I\,a\,\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2+z^2}}\int_0^{2\pi} d\phi'\,\frac{\cos\phi'}{\sqrt{1-\frac{2\,r\,a\,\cos\phi'}{r^2+a^2+z^2}}} \tag{44}$$

Wir entwickeln den Nenner des Integranden als Binomische Reihe ($r \gg a$):

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{2\,r\,a\,\cos\phi'}{r^2 + a^2 + z^2}\right)^{-1/2} &\approx \left(1 - \frac{2\,r\,a\,\cos\phi'}{r^2 + z^2}\right)^{-1/2} && (45)\\
&= (1+x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^k && (46)\\
&= 1 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{(-1/2)\cdot(-3/2)}{2\cdot 1}\right) x^2 + \dots\\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2\,r\,a\,\cos\phi'}{r^2+z^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{2\,r\,a\,\cos\phi'}{r^2+z^2}\right)^2 + \dots
\end{aligned}$$

Und erhalten für das Vektorpotential

$$\begin{aligned}
A_y &\approx \frac{I\,a\,\mu_0}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\int_0^{2\pi} d\phi' \cos\phi' \left(1 + \frac{r\,a\,\cos\phi'}{r^2+z^2}\right) && (47)\\
&= \frac{I\,a^2\,\mu_0}{4}\frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}} && (48)
\end{aligned}$$

Nun können wir wegen der Zylindersymmetrie auf das Vektorpotential schließen:

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_y\,\hat{e}_\phi = \frac{I\,a^2\,\mu_0}{4}\frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{e}_\phi \tag{49}$$

Für das Magnetfeld erhalten wir mit $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ in Komponenten:

$$B_r = \frac{I\,a^2\,\mu_0}{4}\frac{3\,r\,z}{(r^2+z^2)^{5/4}};\quad B_\phi = 0;\quad B_z = \frac{I\,a^2\,\mu_0}{4}\frac{2\,z^2 - r^2}{(r^2+z^2)^{5/4}} \tag{50}$$

(d) Das Magnetische Dipolmoment

$$\vec{\mu} = I\,a^2\,\pi\,\hat{e}_z \tag{51}$$

Löst die Gleichung (in Zylinderkoordinaten)

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\mu}\times\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\mu}\times\vec{r}}{(r^2+z^2)^{3/2}} \tag{52}$$

Alternative Lösung für Aufgabenteil (c) und (d)

Etwas eleganter ist der Ansatz, das Vektorpotential in großer Entfernung über die Multipolentwicklung zu bestimmen, die die Entwicklung für $r \gg a$ schon beinhaltet. Wir wissen aus der Vorlesung, dass das magnetische Dipolmoment, falls es existiert, in großer Entfernung dominiert. Wir wollen also zunächst das Dipolmoment bestimmen:

$$\begin{aligned}
\vec{\mu} &= \frac{1}{2}\int d^3r' \left(\vec{r}\,'\times\vec{j}(\vec{r}\,')\right) && (53)\\
&= \frac{I}{2}\int d^3r'\,\delta(z')\,\delta(r'-a)\,(\vec{r}\,'\times\hat{e}_{\phi'}) && (54)\\
&= \frac{I}{2}\int d^3r'\,\delta(z')\,\delta(r'-a)\,((r'\cos\phi'\hat{e}_x + r'\sin\phi'\hat{e}_y + z'\hat{e}_z)\times(-\sin\phi'\hat{e}_x + \cos\phi'\hat{e}_y)) && (55)\\
&= \frac{I}{2}\int_0^{\infty} dr'\,r' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^{\infty} dz'\,\delta(z')\,\delta(r'-a)\,(-z'\cos\phi'\hat{e}_x + -z'\sin\phi'\hat{e}_y + r'\hat{e}_z) && (56)\\
&= I\,\pi\,a^2\,\hat{e}_z && (57)
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir sofort das Vektorpotential:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\mu}\times\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\mu}\times\vec{r}}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{I\,a^2\,\mu_0}{4}\frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{e}_\phi \tag{58}$$