

# FERIENKURS THEORETISCHE ELEKTRODYNAMIK

DIENSTAG, 05.08.2008

## 1 Der Formalismus der Elektrodynamik

### 1.1 Maxwell-Gleichungen

Die Maxwell-Gleichungen, hier im SI-System angegeben, das wir im Laufe dieser Vorlesung benutzen wollen<sup>1</sup>,

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t); \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0; \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0; \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) \quad (1.4)$$

entsprechen, wie wir in der vorherigen Vorlesung sehen konnten bestimmten experimentellen Befunden. Wobei  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  den elektrischen Feldvektor,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  das magnetische Induktionsfeld,  $\rho(\vec{r}, t)$  die elektrische Ladungsdichte und  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  die elektrische Stromdichte bezeichnen. Es sei hier kurz angemerkt, dass die Maxwell-Gleichungen im Fall der Existenz von magnetischen Monopolen symmetrisch werden würden.

Mit den Maxwellgleichungen und der *Lorentz-Kraft*

$$F_L(\vec{x}, t) = q \cdot \left( \vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}}(t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right) \quad (1.5)$$

kann man gewissermaßen die gesamte Theorie der Elektrodynamik im Vakuum axiomatisieren, wobei die Lorentz-Kraft die Verbindung zu den Bewegungsgleichungen bildet. Dies macht die Elektrodynamik, die, wie wir später noch sehen werden, anders als die Newtonsche Theorie eine relativistische Theorie ist, mathematisch äußerst elegant. In der Elektrodynamik hat sich das Konzept der Punktteilchen erfolgreich bewährt. Allerdings ist die klassische Elektrodynamik nicht bis zu kleinsten Abständen gültig, sondern ist als klassischer Grenzfall der Quantenelektrodynamik zu betrachten.

Wir wollen in dieser Vorlesung einige Eigenschaften der Elektrodynamik untersuchen, die aus den Maxwell-Gleichungen folgen.

### 1.2 Linearität der Maxwell-Gleichungen und Superpositionsprinzip

Eine wichtige Eigenschaft der Maxwell-Gleichungen ist die Linearität. Sie beinhaltet analog zum Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen das Superpositionsprinzip. Lösungen der Maxwell-Gleichungen überlagern sich linear zu neuen Lösungen. Hat man beispielsweise das elektrische

---

<sup>1</sup>Das SI-System wird gerne in der Experimentalphysik verwendet. Ein weiteres sehr beliebtes Einheitensystem ist das Gauß-System, da in ihm die relativistische Struktur der Elektrodynamik aufgrund der  $1/c$  Faktoren besser zum Ausdruck kommt. Außerdem besitzen im Gauß-System das E- und B- Feld die selbe Einheit und lassen sich so eleganter durch Lorentztransformationen in einander überführen.

Feld  $E_1$  einer statischen Ladungsverteilung  $\rho_1$  und das elektrische Feld  $E_2$  einer weiteren statischen Ladungsverteilung  $\rho_2$  bestimmt, so lösen  $E_{ges} = E_1 + E_2$  und  $\rho_{ges} = \rho_1 + \rho_2$  wiederum die Maxwell-Gleichung.

### 1.3 Energieerhaltung, Poyntingsches Theorem

In diesem Abschnitt verzichte ich auf die umfangreiche Herleitung und stelle nur die wichtigsten Zusammenhänge dar.

#### Energiesatz der Elektrodynamik im Vakuum (Poyntingsches Theorem)

Für ein System aus geladenem Teilchen und elektromagnetischen Feldern gilt die Energiebilanzgleichung

$$\frac{\partial \epsilon_{mech}}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon_{em}}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{S}, \quad (1.6)$$

mit

$$\frac{\partial \epsilon_{mech}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (1.7)$$

Dies bezeichnet die zeitliche Ableitung der mechanischen Energiedichte.

$$\epsilon_{em}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{E}^2(\vec{r}, t) + \vec{B}^2(\vec{r}, t)}{2 \mu_0 \epsilon_0} \quad (1.8)$$

Hier definiert  $\epsilon_{em}(\vec{r}, t)$  die elektromagnetische Energiedichte.

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (1.9)$$

Der Poyntingvektor  $\vec{S}(\vec{r}, t)$  definiert die Energiestromdichte.

Das Poyntingsche Theorem kann als eine Art Kontinuitätsgleichung der Energie eines Systems betrachtet werden. Die zeitliche Änderung der totalen Energie in einem Volumen  $V$  ist gleich dem Fluss der Energie durch die  $V$  umschließende Fläche  $\delta V$  (auch  $A(V)$  geschrieben).

$$\frac{d}{dt} (\epsilon_{em}(\vec{r}, t) + \epsilon_{mech}(\vec{r}, t))_V = - \int_{A(V)} d\vec{f} \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) \quad (1.10)$$

## 2 Zeitunabhängige Elektrodynamik

### 2.1 Statische Maxwell-Gleichungen

Betrachtet man den Spezialfall von Zeitunabhängigen Problemen der Elektrodynamik, so erkennt man, dass die Maxwell-Gleichungen in zwei entkoppelte Differentialgleichungs-Systeme zerfallen:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}); \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0; \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0; \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (2.4)$$

Hier stellen Gleichungen (2.1) und (2.2) die Grundgleichungen der *Elektrostatik* und Gleichungen (2.3) und (2.4) die der *Magnetostatik* dar.

Die Kontinuitätsgleichung reduziert sich dann zu

$$\nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0. \quad (2.5)$$

Für die Magnetostatik bedeutet dies, es existiert kein Nettoladungsfluss d.h.  $\vec{j}(\vec{r})$  ist Quellen- und Senkenfrei. Anschaulich kann man sich vorstellen, dass Stöme dann „im Kreis fließen“.

In der Elektrostatik existiert wegen  $\partial\rho(\vec{r})/\partial t = 0$  kein Ladungsfluss.

### 2.1.1 Statische Maxwellgleichungen in Form von Potentialen

Es ist aus der Vektoranalysis bekannt, dass rotationsfreie Vektorfelder Gl. (2.2) als Gradientenfeld eines skalaren Feldes betrachtet werden können

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r}). \quad (2.6)$$

Ein divergenzfreies Vektorfeld Gl. (2.4) kann man schreiben als

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}). \quad (2.7)$$

Hierbei bezeichnet man  $\Phi(\vec{r})$  als *Elektrostatistisches Potential* und  $\vec{A}(\vec{r})$  als *magnetisches Vektorpotential*.

Aufgrund (2.1) gilt dann

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) = \Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}). \quad (2.8)$$

Diese Gleichung wird statische *Poissongleichung* genannt. Für den Fall  $\rho(\vec{r}) = 0$  heißt die so entstehende Gleichung  $\Delta\Phi(\vec{r}) = 0$  *Laplace-Gleichung*.

Es stellt ein Grundsatzproblem der Elektrostatik dar, aus bekannter Ladungsverteilung das Elektrostatistische Potential zu bestimmen. Wie wir in der ersten Vorlesung sehen konnten, lässt sich diese Gleichung mit der *Greenschen-Funktion*<sup>2</sup>

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + const \quad (2.9)$$

lösen.

Mit Gleichung (2.4) folgt analog

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0\vec{j}(\vec{r}) \quad (2.10)$$

Auch hier existiert eine Lösung für das Vektorpotential (man beachte die Ähnlichkeit mit (2.9)):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.11)$$

Man sieht, dass für Gleichung (2.10) mit der Vektoridentität  $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}$  auch die so genannte *Coulombgleichung*  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$  benutzt wurde. Für das elektrostatistische Potential existiert eine ähnliche Form der Eichfreiheit. Auf diese Eichfreiheiten wird in der vierten Vorlesung eingegangen.

---

<sup>2</sup>Die Konstante verschwindet bei Berechnung von E und ist ohne physikalische Bedeutung.

### 2.1.2 Coulomb-Gesetz

Man erhält nun mit Gleichung (2.1), (2.6) und (2.9) das *Coulombsche Gesetz* für eine ruhende Punktladung mit der Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}) = q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$  im Punkt  $r_0$ <sup>3</sup>:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r}) = \nabla_r \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}. \quad (2.12)$$

Mit dem Coulombschen Gesetz wird das Feld einer Punktladung mit Ladung  $q$  am Ort  $r_0$  beschrieben.

Das Coulombsche Gesetz wurde hier von den Maxwell-Gleichungen ausgehend hergeleitet, um die mathematisch elegante Struktur der Elektrodynamik aufzuzeigen. Historisch bildet es als experimenteller Befund die Grundlage der Elektrostatik und wird in der Experimentalphysik oft in der Form

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\vec{F}_{2,1} \quad (2.13)$$

angegeben. Hier ist  $\vec{F}_{1,2}$  die von Teilchen 2 auf Teilchen 1 ausgeübte Kraft. Die Coulomb-Kraft erhält man leicht aus unserer mathematischen Formulierung, indem man die Lorentz-Kraft, Gleichung (1.5), benutzt.

Wegen dem schon vorher erwähnten Superpositionsprinzip überlagern sich Felder und die durch sie induzierten Kräfte (bzw. Lösungen der Maxwell-Gleichungen) linear. Man kann deshalb leicht die Kraft beschreiben, die mehrere Punktladungen  $q_j$  auf eine Punktladung  $q_1$  ausüben:

$$\vec{F}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=2}^N \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_j}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_j|^3}. \quad (2.14)$$

### 2.1.3 Biot-Savartsches Gesetz

Mit Gleichung (2.4), (2.7) und (2.12) finden wir analog

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \nabla_r \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left( \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right). \quad (2.15)$$

Diese Gesetzmäßigkeit nennt sich *Biot-Savartsches Gesetz* und beschreibt das durch den Strom  $\vec{j}(\vec{r}')$  an der Stelle  $r$  induzierte  $\vec{B}$ -Feld. Mit dem Biot-Savartschen Gesetz und der Lorentz-Kraft kann man das *Ampèresche Gesetz* herleiten, das die Wechselwirkung zwischen zwei stromdurchflossenen Leiterschleifen  $C_1$  und  $C_2$  mit Strom  $I_1$  und  $I_2$  beschreibt:

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_1 \times [d\vec{r}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}. \quad (2.16)$$

Das Ampèresche Gesetz übernimmt dieselbe Rolle für die Magnetostatik wie das Coulombsche Gesetz für die Elektrostatik.

<sup>3</sup>Ich indiziere hier den Nablaoperator mit  $r$ , um zu verdeutlichen, dass der Gradient wie üblich bzgl.  $r$  und nicht  $r'$  ausgeführt wird.

## 2.2 Multipolentwicklung

Oftmals ist es sehr schwer, bei einer komplexen Ladungsdichteverteilung  $\rho(\vec{r}')$  bzw. Stromdichteverteilung  $\vec{j}(\vec{r}')$  die zugehörigen Felder und Potentiale anhand Gleichung (2.9) bzw. (2.11) zu ermitteln. Deshalb versucht man bei statischen Ladungs- und Stromdichteverteilungen, die auf den Bereich  $|\vec{r}'| \leq R_0$  begrenzt sind ( $\rho(\vec{r}' > R_0) = 0$ ), die Potentiale für große Entfernungen  $|\vec{r}| \gg R_0$  approximativ zu berechnen<sup>4</sup>. Hierzu nutzt man das aus der Analysis bekannte Verfahren der Taylorentwicklung in mehreren Veränderlichen<sup>5</sup>.

Wir entwickeln also den inversen Abstand  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$  des Integranden in (2.9) bzw. (2.11) um  $\vec{r}' = \vec{0}$ :

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{1}{\alpha! \beta! \gamma!} \left[ \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x_1'^{\alpha} \partial x_2'^{\beta} \partial x_3'^{\gamma}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]_{\vec{r}'=0} \cdot x_1'^{\alpha} x_2'^{\beta} x_3'^{\gamma} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\frac{1}{|\vec{r}|}}_{\alpha=0, \beta=0, \gamma=0} \\ &+ \underbrace{x_1' \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x_1'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]_{\vec{r}'=0}}_{\alpha=1, \beta=0, \gamma=0} + \underbrace{x_2' \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x_2'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]_{\vec{r}'=0}}_{\alpha=0, \beta=1, \gamma=0} + \underbrace{x_3' \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x_3'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]_{\vec{r}'=0}}_{\alpha=0, \beta=0, \gamma=1} + \dots \end{aligned} \quad (2.18)$$

Wir können nun wegen

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_i'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]_{\vec{r}'=0} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]_{\vec{r}'=0} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\vec{r}|} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} \quad (2.19)$$

Gleichung (2.18) wie folgt schreiben:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} - \sum_{i=1}^3 x_i' \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x_i' x_j' \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} + \dots \quad (2.20)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass der dritte Summand aus den aus (2.17) resultierenden Termen der Art  $\alpha + \beta + \gamma = 2$  hervorgeht.

Werden die partiellen Differentiationen in (2.20) ausgeführt, so folgt schließlich

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i' x_i}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x_i' x_j' \left( \frac{3 x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) + \dots \quad (2.21)$$

### 2.2.1 Elektrostatistische Multipolentwicklung

Setzen wir diese Entwicklung in (2.9) ein, so erhalten wir

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0(\vec{r}) + \Phi_1(\vec{r}) + \Phi_2(\vec{r}) + \dots \quad (2.22)$$

mit

<sup>4</sup>Meist interessiert nur das asymptotische Verhalten der Potentiale und Felder in der Fernzone.

<sup>5</sup>Hier: drei Raumrichtungen.

- **Elektrischer Monopol**

$$4\pi \epsilon_0 \Phi_0(\vec{r}) = \frac{1}{r} \int d^3r' \rho(\vec{r}') = \frac{Q}{r}, \quad Q = \int d^3r' \rho(\vec{r}'). \quad (2.23)$$

Man nennt diesen Term *Elektrisches Monopolmoment*. In großer Entfernung dominiert dieser Term in der Entwicklung. Das heißt von weiter Entfernung betrachtet wirkt jede statische Ladungsverteilung wie eine Punktladung.

- **Elektrischer Dipol**

$$4\pi \epsilon_0 \Phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^3 x_i \int d^3r' x'_i \rho(\vec{r}') = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3}, \quad p_i = \int d^3r' x'_i \rho(\vec{r}'). \quad (2.24)$$

Hier nennt man  $\vec{p}$  das *Elektrische Dipolmoment* der Ladungsverteilung.

- **Elektrischer Quadrupol**

$$4\pi \epsilon_0 \Phi_2(\vec{r}) = \sum_{i,j=1}^3 \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{2r^5} \int d^3r' x'_i x'_j \rho(\vec{r}'). \quad (2.25)$$

Dieser Ausdruck kann vereinfacht werden, indem man die Null in Form von

$$0 = \sum_{i,j=1}^3 \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{6r^5} \int d^3r' r'^2 \delta_{ij} \rho(\vec{r}') \quad (2.26)$$

hinzuaddiert, so dass

$$4\pi \epsilon_0 \Phi_2(\vec{r}) = \sum_{i,j=1}^3 \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{6r^5} Q_{ij}, \quad Q_{ij} = \int d^3r' (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}') \quad (2.27)$$

wobei  $Q_{ij}$  das *Elektrische Quadrupolmoment* definiert. Da  $Q_{ij}$  spurlos ist ( $\sum_{i=1}^3 Q_{ii} = 0$ ) verschwindet der zweite Term in (2.27) und wir erhalten

$$4\pi \epsilon_0 \Phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij}. \quad (2.28)$$

Die Matrix  $Q_{ij}$  verhält sich wie ein Tensor 2. Stufe und besitzt 9 Komponenten.

- Der nächste Term der Entwicklung (2.22) enthält das *Oktupolmoment*. Es ist ein Tensor 3. Stufe und besitzt 27 Komponenten.

## 2.2.2 Magnetostatische Multipolentwicklung

Für das Vektorpotential ergibt sich mit (2.11) und (2.21) analog

- **Magnetischer Monopol**

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{1}{r} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}'). \quad (2.29)$$

Zur weiteren Argumentation benötigen wir folgenden Hilfssatz:

Seien  $f(\vec{r}')$ ,  $g(\vec{r}')$  stetig differenzierbare skalare Felder. So gilt in der Magnetostatik wegen  $\nabla_{r'} \cdot \vec{j}(\vec{r}') = 0$ :

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \int d^3 r' \left[ f(\vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_{r'} g(\vec{r}') + g(\vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_{r'} f(\vec{r}') \right] \\ &= \int_{V \rightarrow \infty} dV \nabla \cdot (g f \vec{j}) = \oint_{A(V \rightarrow \infty)} df \cdot (g f \vec{j}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Wir setzen nun  $f = 1$  und  $g = x'_1, x'_2, x'_3$  und erhalten

$$\int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \hat{e}_{x'_1, x'_2, x'_3} = 0 \quad (2.31)$$

$$\Rightarrow \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') = 0. \quad (2.32)$$

Die Statischen Maxwellgleichungen (2.1-2.4) postulieren also die Nichtexistenz von magnetischen Monopolen.

#### • Magnetischer Dipol

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{1}{r^3} \int d^3 r' (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}'). \quad (2.33)$$

Um (2.33) leichter berechnen zu können benutzen wir wieder (2.30) und setzen  $f = x'_i$  und  $g = x'_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

Nun folgt

$$0 = \int d^3 r' (x'_i j_j(\vec{r}') + x'_j j_i(\vec{r}')) \quad (2.34)$$

$$\Rightarrow \int d^3 r' x'_i j_j(\vec{r}') = - \int d^3 r' x'_j j_i(\vec{r}'). \quad (2.35)$$

Sein nun  $\vec{a}$  ein beliebiger Vektor, so sehen wir

$$\vec{a} \int d^3 r' \vec{r}' j_i(\vec{r}') = \sum_{j=1}^3 a_j \int d^3 r' x'_j j_i(\vec{r}') \quad (2.36)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 a_j \int d^3 r' (x'_i j_j(\vec{r}') - x'_j j_i(\vec{r}')) \quad (2.37)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j \int d^3 r' (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}'))_k. \quad (2.38)$$

Es gilt also die Vektoridentität

$$\int d^3 r' (\vec{a} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') = -\frac{1}{2} \left[ \vec{a} \times \int d^3 r' (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) \right]. \quad (2.39)$$

Und wir erhalten schließlich aus (2.33)

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3}, \quad \vec{\mu} = \frac{1}{2} \int d^3 r' (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) \quad (2.40)$$

Hier bezeichnet  $\vec{\mu}$  das *magnetische Dipolmoment*.

### 2.3 Stetigkeitsbedingungen bei Leitern, Randbedingungen

Im folgenden betrachten wir das Elektrostatistische Problem der Art:

Ein Volumen  $V$  ist durch Metallflächen begrenzt. In  $V$  ist die Ladungsverteilung bekannt. Gesucht ist das elektrostatistische Potential  $\Phi(\vec{r})$  in  $V$ .

In einem Metall können sich Leitungselektronen (näherungsweise) frei bewegen. Diese bewirken ein sich einstellendes Gleichgewicht mit

$$\vec{E} = 0 \quad (2.41)$$

im Metall. Für  $\vec{E} \neq 0$  wirkt so lange eine Kraft auf die Elektronen, bis  $\vec{E} = 0$  gilt. Daraus folgt:

$$\Phi(\vec{r}) = const \quad (2.42)$$

im Metall.

Mit Hilfe des Gaußschen oder des Stokesschen Satzes können wir eine Aussage über das Feld an der Grenzfläche  $R$  zwischen Vakuum und Metall machen.

Aus Linienelementen der Länge  $l$ , die parallel zur Grenzfläche liegen bilden wir die Rechteckfläche  $\Delta A$  (Abb.1). Der Abstand zwischen den Linienelementen wird infinitesimal klein gemacht.

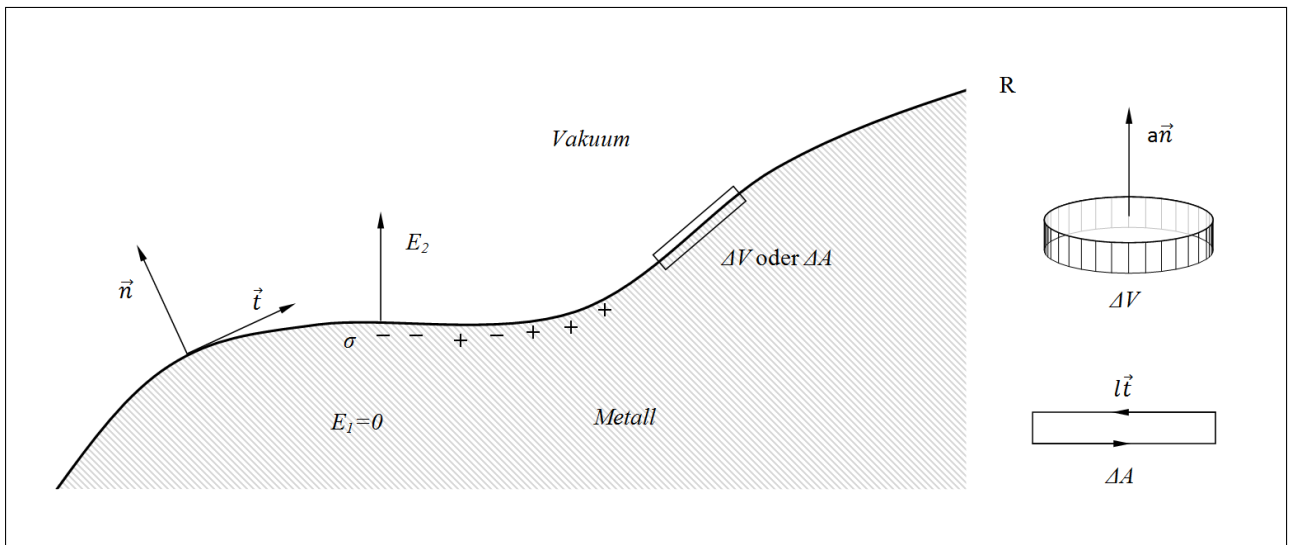


Abbildung 1: Vakuum, das durch Metall begrenzt wird. Im Inneren verschwindet das elektrische Feld  $\vec{E}$ , am Rand des Metalls gibt es die Oberflächenladung  $\sigma$ . Der Vektor  $\vec{n}$  beschreibt den Normalenvektor von  $R$  und  $\vec{t}$  ist ein zu  $R$  tangentialer Vektor.  $\vec{E}_1$  beschreibt das elektrische Feld im Metall und  $\vec{E}_2$  das im Vakuum.

Mit  $\nabla \times \vec{E} = 0$  und dem Stokesschen Satz erhalten wir:

$$0 = \int_{\Delta A} d\vec{A} \cdot \nabla \times \vec{E} = \oint d\vec{r} \cdot \vec{E} = l\vec{t} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) . \quad (2.43)$$

Wie wir sehen konnten (2.41) gilt  $\vec{E}_1 = 0$ . Damit ergibt sich

$$\vec{t} \cdot \vec{E}_2(\vec{r}) \Big|_{\vec{r} \in R} = 0 . \quad (2.44)$$



Das bedeutet: **Es gibt keinen tangentialen Anteil des elektrischen Feldes am Rand R.** Wir bilden nun das Volumenelement  $\Delta V$  aus zwei parallelen Flächenelementen, die in infinitesimalem Abstand zueinander liegen (Abb. 1). Zwischen ihnen liegt der Rand R. Wir wenden nun den Gaußschen Satz auf das Volumenelement mit der Oberfläche  $A = A(\Delta V)$  an:

$$\oint_{A(\Delta V)} d\vec{A} \cdot \vec{E} = a\vec{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Delta V} d^3r \rho = \frac{1}{\epsilon_0} q. \quad (2.45)$$

Da wir den Abstand zwischen den begrenzenden Flächen infinitesimal klein gemacht haben, tragen nur Ladungen, die direkt an der Oberfläche sitzen zu  $q$  bei. Wir führen deshalb die Oberflächenladung  $\sigma(\vec{r}) = q/a$  ein und berücksichtigen  $\vec{E}_1 = 0$ . Damit erhalten wir für (2.45)

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\vec{r}). \quad (2.46)$$

Das heißt: **Die normalkomponente des elektrischen Feldes am Rand R ist  $1/\epsilon_0$  mal die Oberflächenladung des Metalls..**

### 2.3.1 Dirichletsche Randbedingung

Aus (2.44) folgt:

$$0 = \vec{t} \cdot \nabla \Phi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r} \in R} = \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial t} \Big|_{\vec{r} \in R}. \quad (2.47)$$

Und damit erhalten wir die *Dirichlet-Randbedingung*

$$\Phi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r} \in R} = \Phi_0(\vec{r}). \quad (2.48)$$

Insbesondere gilt  $\Phi = const$  auf einer Leiteroberfläche.

### 2.3.2 von Neumannsche Randbedingung

Mit (2.46) erhalten wir

$$\frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial n} \Big|_{\vec{r} \in R} = \vec{n} \cdot \nabla \Phi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r} \in R} = -\vec{n} \cdot \vec{E}_2 \quad (2.49)$$

$$= -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\vec{r}) \quad (2.50)$$

die von *Neumannsche Randbedingung*. Dies bedeutet  $\Phi$  ist stetig auf R, aber  $\vec{n} \cdot \nabla \Phi$  macht einen Sprung. Dirichletsche- und Neumannsche Randwertprobleme können formal durch Greensche Funktionen gelöst werden.

### 2.3.3 Spiegelladungsmethode

Nachdem wir eine Klasse von Randwertproblemen betrachtet und deren Eigenschaften genauer spezifiziert haben, wollen wir nun eine Möglichkeit zur Lösung einer Art von Randwertproblemen aufzeigen.

Wir stellen uns als Beispiel eine Punktladung im Vakuum im Abstand  $a$  vor einer geerdeten

Metalloberfläche vor (Abb. 2).

Gesucht ist nun die Lösung von  $\Delta\Phi(\vec{r}) = -1/\epsilon_0 \rho(\vec{r})$  mit  $\rho(\vec{r}) = q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{a})$ ,  $\vec{a} = (a, 0, 0)$  unter einer Randbedingung vom Dirichlet-Typ:  $\Phi|_{x=0} = 0$ . Für  $x < 0$  soll  $\Phi = 0$  gelten.

Wir können uns eine virtuelle *Spiegelladung* mit Ladung  $q_s$  am Ort  $\vec{r}_s = (x_s, 0, 0)$  vorstellen,

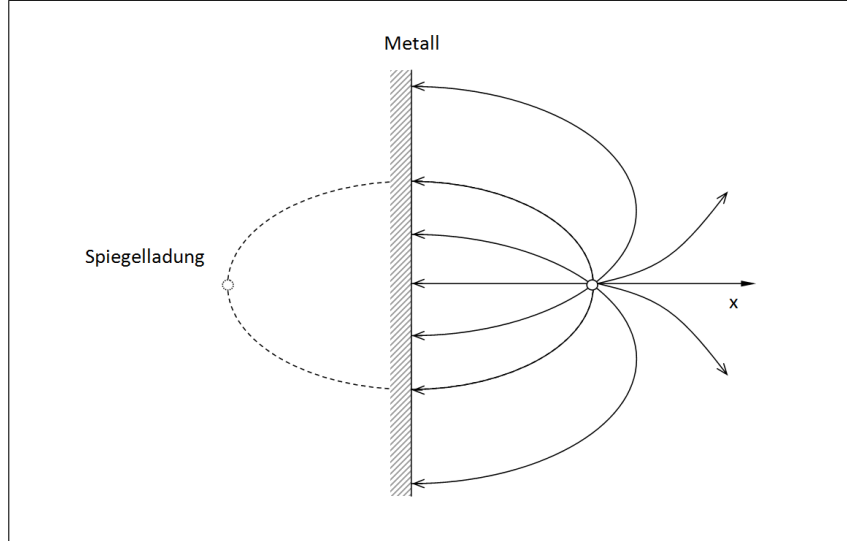


Abbildung 2: Punktladung vor einer Metalloberfläche.

und deren Wirkung untersuchen. Es liegt nahe, dass eine punktförmige Spiegelladung auf der x-Achse unsere Randbedingung erfüllt.

Wir finden dann:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\vec{r} - \vec{a}|} + \frac{q_s}{|\vec{r} - \vec{r}_s|} \right). \quad (2.51)$$

Wir sehen, dass die Randbedingung  $\Phi|_{x=0} = 0$  für den Fall  $x_s = -a$  und  $q_s = -q$  erfüllt ist und unsere gesuchte Lösung lautet:

$$\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{r} + \vec{a}|} \right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

Wir wollen nun die Influenzladung auf der Metalloberfläche mit Hilfe der Neumannschen Randbedingung berechnen.

$$\sigma(\vec{r})|_{x=0} = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial n} \right|_{x=0} = -\epsilon_0 \vec{n} \cdot \nabla\Phi(\vec{r})|_{x=0} = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (2.53)$$

$$= \frac{q}{4\pi} \left( \frac{-2a}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \quad (2.54)$$

Auf die gesamte influenzierte Ladung können wir nun leicht schließen, indem wir  $\sigma(\vec{r})$  über die gesamte Metalloberfläche integrieren.