Matthias Danner

Ferienkurs Elektrodynamik - SS 2008

1 Satz von Stokes

Verifizieren Sie den Satz von STOKES am Beispiel der Fläche A und des Vektorfeldes $\boldsymbol{F}$.

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} x^3 + yz^2 \\ y^2 + xz^2 \\ xyz \end{pmatrix}, \qquad A = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \;\wedge\; z \geq 0\,\}$$

Lösung

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} xz - 2xz \\ 2yz - yz \\ z^2 - z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xz \\ yz \\ 0 \end{pmatrix}$$

Als nächstes das Integral über die Halbkugel

$$\begin{aligned}
\int_A d\boldsymbol{A} \cdot \nabla \times \boldsymbol{F} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta\; \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\phi\cos\theta \\ \sin\theta\sin\phi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta\; \sin\theta\,(-\sin^2\theta\cos^2\phi\cos\theta + \sin^2\theta\sin^2\phi\cos\theta) \\
&= \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi\,(\sin^2\phi - \cos^2\phi)}_{=0} \int_0^{\pi/2} d\theta\; \sin^3\theta\cos\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

Der Rand von A, über den man jetzt integrieren muss, ist ein Kreis in der x-y-Ebene mit Radius 1, den man folgendermaßen parametrisiert:

$$\boldsymbol{r}(\phi) = (\cos\phi,\, \sin\phi,\, 0) \quad\Longrightarrow\quad d\boldsymbol{r} = d\phi\,(-\sin\phi,\, \cos\phi,\, 0)$$

Damit folgt (man beachte, dass $z = 0$):

$$\begin{aligned}
\int_{\partial A} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F} &= \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^3 + yz^2 \\ y^2 + xz^2 \\ xyz \end{pmatrix} \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi\,(-\sin\phi\cos^3\phi + \cos\phi\sin^2\phi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Den Wert der trigonometrischen Integrale erhält man am einfachsten aus Symmetriebetrachtungen. Nützlich ist dabei auch die Tatsache, dass man bei T-periodischen Funktionen, so man über eine ganze Periode integiert, den Integrationsbereich beliebig verschieben darf.

$$\int_0^T dx\ f(x) \ = \ \int_t^{T+t} dx\ f(x)$$

In unserem Fall für $T = 2\pi$ und $t = -\pi$ beispielsweise symmetrisch zum Ursprung.

2 Satz von Gauß

Verifizieren Sie den Satz von GAUSS am Beispiel des Volumens V und des Vektorfeldes $\boldsymbol{F}$.

$$\boldsymbol{F} \ = \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}, \qquad V \ = \ \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ \wedge \ z \geq 0\,\}$$

Lösung

Zunächst benötigt man die Divergenz von F:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} \ = \ 2 + 2z$$

Diese integriert man nun über die Halbkugel.

$$\begin{aligned}
\int_V dV\ \nabla \cdot \boldsymbol{F} \ &= \ \int_0^1 dr\, r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta\ \sin\theta\ (2 + 2z) \\
&= \ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \ + \ 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} \int_0^1 d\cos\theta\ \cos\theta \\
&= \ \frac{4}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi \\
&= \ \frac{11}{6}\pi
\end{aligned}$$

Da in der ganzen x-y-Ebene $d\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{F}$ gilt, verschwindet das Integral über den „Boden“ der Halbkugel. Bleibt noch die obere Hälfte S der Kugeloberfläche:

$$\begin{aligned}
\int_S d\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{F} \ &= \ \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta\ \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \ \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta\ \sin\theta\ (\sin^2\theta\cos^2\phi \ + \ \sin^2\theta\sin^2\phi \ + \ \cos^3\theta) \\
&= \ 2\pi\,[\ \underbrace{\int_0^{\pi/2} d\theta\ \sin^3\theta}_{=\,2/3} \ + \ \int_0^{\pi/2} d\theta\ \sin\theta\ \cos^3\theta\ ] \\
&= \ 2\pi\,[\ \frac{2}{3} \ + \ \underbrace{\int_0^1 d\cos\theta\ \cos^3\theta}_{=\,1/4}\ ] \\
&= \ \frac{11}{6}\pi
\end{aligned}$$

3 System von Differentialgleichungen

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Randbedingungen. Welche Form hat die Kurve, die $\boldsymbol{v}$ beschreibt?

$$\dot{\boldsymbol{v}} \;=\; \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{F}\,, \qquad \boldsymbol{v}(0) \;=\; \boldsymbol{v}_0\,, \quad \boldsymbol{F} \;=\; (0,\,0,\,1)$$

Lösung

$$\dot{\boldsymbol{v}} \;=\; \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Wie man sieht, bleibt v_z konstant. Es genügt also, nur die x-y-Ebene zu betrachten (Formal zerfällt die Matrix in eine direkte Summe).

$$\dot{\boldsymbol{v}} \;=\; \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} \;=\; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:\,A} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

Die Lösung lautet daher:

$$\boldsymbol{v}(t) \;=\; e^{tA}\,\boldsymbol{v}_0 \;=\; e^{tS\Lambda S^{-1}}\,\boldsymbol{v}_0 \;=\; S\,e^{t\Lambda}\,S^{-1}\,\boldsymbol{v}_0 \;=\; S\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t},\,e^{\lambda_2 t})\,S^{-1}\,\boldsymbol{v}_0$$

Die Eigenwerte von A sind $\lambda_{1/2} = \mp i$, woraus unmittelbar die Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1 \propto (i,\,1)$ und $\boldsymbol{v}_2 \propto (1,\,i)$ folgen. Damit erhält man die Transformationsmatrix S sowie ihre Inverse S^{-1}:

$$S \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\,, \qquad S^{-1} \;=\; S^{\dagger} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Der Ausdruck für $\boldsymbol{v}(t)$ lautet dann:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) \;&=\; S\,\mathrm{diag}(e^{-it},\,e^{it})\,S^{-1}\,\boldsymbol{v}_0 \\
&=\; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\
&=\; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\,e^{-it} & e^{-it} \\ e^{it} & -i\,e^{it} \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\
&=\; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-it} + e^{it} & i\,e^{-it} - i\,e^{it} \\ -i\,e^{-it} + i\,e^{it} & e^{-it} + e^{it} \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\
&=\; \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_0
\end{aligned}$$

Der Vektor $\boldsymbol{v}(t)$ rotiert um die z-Achse und beschreibt damit einen Kreis. Interpretiert man ihn als Geschwindigkeitsvektor mit $v_z = \mathit{const.} \neq 0$, so beschreibt er die Geschwindigkeit eines Teilchens, das sich auf einer spiralförmigen Bahn in z-Richtung bewegt.

4 Partielle Differentialgleichung

Lösen Sie die folgende partielle Differentialgleichung unter Berücksichtigung der angegebenen Randbedingungen mithilfe eines Separationsansatzes.

$$\frac{\partial\,\Phi(x,t)}{\partial t} \;=\; \frac{\partial^2\,\Phi(x,t)}{\partial x^2}\,, \qquad \Phi(0,t) \;=\; \Phi(1,t) \;=\; 0\,, \quad \Phi(x,0) \;=\; \sin(\pi x)$$

Lösung

Der Separationsansatz

$$\Phi(x,t) \;=\; X(x)T(t)$$

führt auf

$$XT' \;=\; TX'' \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{T'}{T} \;=\; \frac{X''}{X}$$

Die linke Seite ist nur noch von t, die rechte nur noch von x abhängig. Das Gleichheitszeichen kann nur dann für alle x und t gültig sein, wenn beide Seiten der Gleichung konstant sind.

$$\frac{T'}{T} \;=\; \frac{X''}{X} \;=\; -k^2 \quad \Longleftrightarrow \quad T' \;=\; -k^2 T\,, \quad X'' \;=\; -k^2 X$$

Die Lösung hat also folgende Struktur:

$$\Phi(x,t) \;=\; e^{-k^2 t}\,(A\,\sin kx + B\,\cos kx)$$

Einsetzen in die erste Randbedingung liefert:

$$\Phi(0,t) \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad B\,e^{-k^2 t} \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad B \;=\; 0$$

Daraus folgt, dass stets $A \neq 0$ gelten muss, da Φ sonst die triviale Lösung wäre.

$$\Phi(1,t) \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A\,e^{-k^2 t}\,\sin k \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k \;=\; n\pi\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Um den vollständigen Lösungsraum zu „erreichen“, muss ab jetzt also über alle n summiert werden ($A \to a_n$). Zu guter letzt noch die Startbedingung.

$$\Phi(x,0) \;=\; \sin\pi x \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\sin\,n\pi x \;=\; \sin\pi x \quad \Longleftrightarrow \quad a_n \;=\; \delta_{n,1}$$

Die Lösung lautet also:

$$\Phi(x,t) \;=\; e^{-\pi^2 t}\sin\pi x$$

5 Green-Funktion

Berechnen Sie mittels Fourier-Transformation die Green-Funktion $G(\boldsymbol{x})$ des Laplace-Operators. Geben Sie damit die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung für eine Punktladung q, die sich am Ort $\boldsymbol{x}_0$ befindet, an.

$$\Delta\,\Phi(\boldsymbol{x}) \;=\; -\frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_0}$$

Lösung

Die Fourier-Integrale lauten:

$$f(\boldsymbol{k}) \;=\; \int d^3x\; e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\; f(\boldsymbol{x})$$

$$f(\boldsymbol{x}) \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\; e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\; f(\boldsymbol{k})$$

Fouriertransformation der Bestimmungsgleichung liefert:

$$-\boldsymbol{k}^2\, G(\boldsymbol{k}) \;=\; 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad G(\boldsymbol{k}) \;=\; -\frac{1}{\boldsymbol{k}^2}$$

Die gesuchte Funktion $G(\boldsymbol{x})$ erhält man schließlich durch Rücktransformation

$$\begin{aligned}
G(\boldsymbol{x}) \;&=\; \mathrm{FT}^{-1}\, G(\boldsymbol{k}) \\
&=\; -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{k}^2} \\
&=\; -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \int_{-1}^{1} d\cos\theta \; e^{ikx\cos\theta} \\
&=\; -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk\, \frac{1}{ikx}\,(e^{ikx} - e^{-ikx}) \\
&=\; -\frac{1}{2\pi^2}\, \frac{1}{x} \underbrace{\int_0^\infty dk\, \frac{\sin kx}{k}}_{=\pi/2\,\cdot\,\mathrm{sgn}\, x} \\
&=\; -\frac{1}{4\pi}\, \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Um das Integral in der Zweiten Zeile ausführen zu können, wurde die Basis des $\boldsymbol{k}$-Raums so gewählt, dass $k_3 \parallel \boldsymbol{x}$ ist. Außerdem wurde für das θ-Integral der übliche „Kosinus-Trick“ verwendet.

Mit der Ladungsdichte

$$\rho(\boldsymbol{x}) \;=\; q\,\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$$

lautet die Inhomogenität der Gleichung

$$g(\boldsymbol{x}) \;=\; -\frac{q}{\varepsilon_0}\,\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$$

Faltung führt schließlich zur partikulären Lösung:

$$\begin{aligned}
\Phi_{part}(\boldsymbol{x}) \;&=\; \int d^3x'\; G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\, g(\boldsymbol{x}') \\
&=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x'\; \frac{q}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|}\, \delta(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_0) \\
&=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{q}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|}
\end{aligned}$$

Da man im Unendlichen üblicherweise $\Phi \equiv 0$ wählt, gilt für die homogene Lösung $\Phi_{hom} \equiv 0$. Den homogenen Teil der Lösung kann man also mittels Randbedingungen „wegdiskutieren“ und man erhält:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) \;=\; \Phi_{part}(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{q}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|}$$