Die Maxwell-Gleichungen

1 Mathematische Grundlagen

Wenn man erstmals mit der Elektrodynamik konfrontiert wird, hat man vermutlich mit der Vektoranalysis und dem damit verbundenen Auftreten von partiellen Differentialgleichungen, die größten Schwierigkeiten. Daher werden in den folgenden Abschnitten noch einmal die wichtigsten Resultate dieser Teilgebiete motiviert und ggf. abgeleitet. Die Argumentation wird dabei eher intuitiv als mathematisch Streng ausfallen.

1.1 Vektoranalysis

Die Vektoranalysis befasst sich mit der Beschreibung von *Feldern* und deren Dynamik. Für die Elektrodynamik sind dabei *Skalar*- und *Vektorfelder* am wichtigsten.

1.1.1 Skalarfelder

Ein Skalarfeld ist üblicherweise eine Funktion Φ, die jedem Punkt des Raumes eine Zahl $\Phi(\boldsymbol{x}, t)$ zuordnet, deren Wert zusätzlich noch von der Zeit abhängig sein kann. Um überhaupt Aussagen über die Dynamik eines Skalarfelds machen zu können, benötigt man die Ableitungen nach den Parametern.

Bild...

Die Zeitableitung liefert dabei ein weiteres Skalarfeld $\partial_t \Phi(\boldsymbol{x}, t)$, die räumlichen Ableitungen hingegen ein Vektorfeld $\nabla\Phi(\boldsymbol{x}, t)$, das senkrecht auf den Äquipotentialflächen von Φ steht und die Richtung sowie das Maß des stärksten Anstiegs wiedergibt.

1.1.2 Vektorfelder

<PRELIM>
Ein Vektorfeld $\boldsymbol{A}$ ordnet jedem Punkt des Raumes einen Vektor $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ zu. Verglichen mit dem Skalarfeld, ist die Beschreibung eines Vektorfelds jedoch wesentlich komplexer. Am Beispiel des Geschwindigkeitsfelds eines Flusses lässt sie sich jedoch gut veranschaulichen.

Bild...

- Rotationsachse eines schwimmenden Körpers
- Veranschaulichung von Feynman
- Quellen
- Erhöhung der Wassermenge (Zeitableitung)

1.1.3 Integralsätze

Bisher haben wir lediglich differenzielle Aussagen über das Verhalten von Feldern an bestimmten Punkten gemacht. Möchte man jedoch Aussagen über endliche Teilräume machen, muss man die differenziellen Größen gewissermaßen „aufintegrieren“. Dazu führe man sich vor Augen, dass die Divergenz eines Vektorfeldes an einem Punkt gleich dem Oberflächenintegral über den Rand eines Volumenelements um diesen Punkt ist. Analog ist die Rotation eines Vektorfeldes an einem Punkt gleich dem Linienintegral über den Rand eines Flächenelements an diesem Punkt. In einer intuitiven, wenn auch etwas „unsauberen“ Notation also:

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{V})\, dV \;=\; \oint_{\partial(dV)} d\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{V}$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{V}) \cdot d\boldsymbol{A} \;=\; \oint_{\partial(dA)} d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{V}$$

Will man nun den Fluss eines Vektorfelds aus einem endlichen Volumen, bzw. das Linienintegral um eine endliche Fläche wissen, muss man lediglich über die einzelnen infinitesimalen Beträge integrieren. Dabei heben sich die Beiträge an den Grenzflächen bzw. -linien zweier benachbarter Volumen- bzw. Flächenelemente auf, so dass nur der Rand des Volumens bzw. der Fläche übrigbleibt. Die Integralsätze von Stokes und Gauss beschreiben genau diesen Sachverhalt (der zweite ist dabei eigentlich ein Spezialfall des ersten). Sie lauten:

$$\int_A d\boldsymbol{A} \cdot \nabla \times \boldsymbol{V} \;=\; \oint_{\partial A} d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{V}$$

$$\int_V dV\; \nabla \cdot \boldsymbol{V} \;=\; \oint_{\partial V} d\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{V}$$

Ein weiterer Integralsatz, der ein Vektorfeld in einen rotations- und einen divergenzfreien Teil zerlegt, ist der *Zerlegungssatz* von Helmholtz. Er lautet:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) \;=\; \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \,\frac{\nabla' \times \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}')}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|} \;-\; \nabla\, \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \,\frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}')}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|}$$

Außerdem besagt dieser Satz, dass ein Vektorfeld durch die Angabe seines Divergenz- und Rotationsfelds eindeutig bestimmt ist. Dies ist der Grund dafür, dass man bei der Herleitung der Feldgleichungen für das elektrische, bzw. magnetische Feld lediglich nach Ausdrücken für die Divergenz und Rotation sucht.

1.2 Partielle Differentialgleichungen

1.2.1 Separationsansatz

Ist die Geometrie eines Problems so beschaffen, dass durch geeignete Koordinatenwahl Symmetrien ausgenutzt werden können und die Randflächen als Koordinatenflächen darstellbar sind (Randbedingungen!), bietet sich ein Separationsansatz an. Beispielsweise kann der Ansatz

$$\Phi(x, y, z, t) \;=\; X(x)Y(y)Z(z)T(t)$$

dazu führen, dass die Differentialgleichung in vier Differentialgleichungen zerfällt; eine für jede Variable. (Näheres dazu in den Übungen)

1.2.2 Green-Funktion

Die Green-Funktion $G(\boldsymbol{x})$ eines Differentialoperators D ist wiefolgt definiert:

$$DG(\boldsymbol{x}) \;=\; \delta(\boldsymbol{x})$$

wobei δ die Dirac'sche „Deltafunktion“ ist. Damit lässt sich die Lösung einer Differentialgleichung leicht angeben:

$$D\psi(\boldsymbol{x}) \;=\; f(\boldsymbol{x}) \quad\Longleftrightarrow\quad \psi(\boldsymbol{x}) \;=\; \psi_{hom}(\boldsymbol{x}) \;+\; \int d^nx'\, G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\, f(\boldsymbol{x}')\;,$$

Dabei ist ψ_{hom} Lösung der homogenen Differentialgleichung. Durch Anwenden von D überzeugt man sich leicht davon, dass ψ die gesuchte Lösung ist.

2 Herleitung der Maxwell-Gleichungen

2.1 Elektrostatik

Das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ wird über die Kraft auf eine Ladung q definiert und ist damit eine Messgröße, was wiederum erst eine experimentelle Untersuchung erlaubt.

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$

Das Coulomb-Gesetz

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1\, q_2}{\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|^2}$$

das die Kraft zwischen zwei Punktladungen q_1 und q_2 beschreibt sowie das Superpositionsprinzip ermöglichen es nun, eine Gleichung für das Elektrische Feld von n Punktladungen anzugeben:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i\|^3}$$

Führt man nun eine Ladungsdichte ρ ein und verwendet die Tatsache, dass

$$\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i\|^3} = -\nabla \frac{1}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|} \tag{1}$$

lässt sich $\boldsymbol{E}$ wiefolgt schreiben:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\nabla \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \, \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|}}_{=:\, \Phi(\boldsymbol{x})} = -\nabla\Phi(\boldsymbol{x})$$

Dabei wurde das *elektrostatische Potential* Φ eingeführt. Wie man sieht, ist $\boldsymbol{E}$ ein Gradientenfeld, was wiederum bedeutet, dass seine Rotation verschwinden muss:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

Damit hat man schonmal einen Ausdruck für die Rotation des E-Feldes. Bleibt noch die Divergenz:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) &= -\Delta\Phi(\boldsymbol{x}) \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \, \rho(\boldsymbol{x}') \; \underbrace{\Delta \frac{1}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|}}_{= -4\pi\, \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} \\
&= \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_0}
\end{aligned}$$

Nach dem zweiten Gleichheitszeichen wurde hierbei die Green-Funktion des Laplace-Operators verwendet. Damit sind die beiden ersten Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik gefunden:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

2.2 Magnetostatik

Die Definition des Magnetischen Felds $\boldsymbol{B}$ erfolgt ebenfalls über ein Kraftgesetz. Auf ein Element $\boldsymbol{dl}$ eines mit dem Strom I durchflossenen Drahtes wirkt dabei eine Kraft $d\boldsymbol{F}$, für die gilt:

$$dF \propto I\,, \quad dF \propto dl\,, \quad d\boldsymbol{F} \perp d\boldsymbol{l} \qquad \Longleftrightarrow \qquad d\boldsymbol{F} \propto I\, d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$$

Im SI-System ergibt sich damit

$$d\boldsymbol{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I\, d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$$

Damit liegt $\boldsymbol{B}$ als Meßgröße fest und man kann nun experimentell untersuchen, welches Magnetfeld ein Stück Draht bei $\boldsymbol{x}'$, das vom Strom I durchflossen wird, am Ort $\boldsymbol{x}$ erzeugt. Experimentell findet man folgendes:

$$dB \propto I\,dl\,, \quad d\boldsymbol{B} \perp d\boldsymbol{l}\,, \quad d\boldsymbol{B} \perp \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,, \quad dB \propto \frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|^2}\,, \quad dB \propto \sin\angle(d\boldsymbol{l},\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

Dies lässt sich zum differenziellen Biot-Savart-Gesetz zusammenfassen:

$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\, I\,d\boldsymbol{l} \times \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|}$$

Führt man nun noch die Stromdichte $\boldsymbol{j}$ gemäß

$$I\,d\boldsymbol{l} \;=\; \boldsymbol{j}\,d^3x$$

ein, erhält man für $\boldsymbol{B}$ folgenden, integralen Ausdruck:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \;&=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\;\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') \times \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|^3} \\
&=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\;\nabla\frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') \\
&=\; \nabla \times \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\;\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|}}_{=:\,\boldsymbol{A}} \\
&=\; \nabla \times \boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

Dabei wurde das *Vektorpotential* $\boldsymbol{A}$ eingeführt. Das Magnetfeld ist also ein Rotationsfeld. Damit folgt sofort:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} \;=\; 0 \tag{2}$$

Bleibt noch die Rotation:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} \;=\; \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} \;=\; \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta\boldsymbol{A} \tag{3}$$

zunächst sehen wir uns nur den rechten Term genauer an:

$$\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\;\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\,\Delta\frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|} \;=\; -\mu_0\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

Für die Divergenz von $\boldsymbol{A}$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{A} \;&=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\;\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|} \\
&=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\;\frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|} \qquad (5) \\
&=\; 0 \qquad \text{(Magnetostatik)} \qquad (6)
\end{aligned}$$

Nach dem zweiten Gleichheitszeichen wurde hierbei die Divergenz ausgeschrieben, Gleichung (1) verwendet und partiell Integriert. Schließlich wurde noch verwendet, dass die Divergenz von stationären Strömen - wie es in der Magnetostatik der Fall ist - verschwindet. Aus den Gleichungen (3), (4) und (6) folgen schließlich mit Gleichung (2) die Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} \;=\; 0\,, \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} \;=\; \mu_0\boldsymbol{j}$$

2.3 Zeitliche Dynamik

2.3.1 Verschiebungsstrom

Um die bisher erhaltenen Gleichungen zeitabhängig zu machen, liegt es nahe, von Gleichung (5) auszugehen und nicht-stationäre Ströme zuzulassen. Dazu zunächst eine wichtige Folgerung aus der Ladungserhaltung: Die in einem Volumen V enthaltene Ladung Q kann sich nur dann ändern, wenn ein Strom $\boldsymbol{j}$ durch den Rand ∂V des Volumens fließt. D.h.:

$$\dot{Q} \;=\; -\oint_{\partial V} d\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j} \tag{7}$$

Weiterhin gilt

$$\dot{Q} \;=\; \frac{d}{dt}\int_V d^3x\;\rho(\boldsymbol{x}) \;=\; \int_V d^3x\;\dot{\rho}(\boldsymbol{x}) \tag{8}$$

wobei nach dem zweiten Gleichheitszeichen angenommen wurde, dass sich das Volumen nicht ändert. Wendet man nun auf Gleichung (7) den Satz von Gauss an und setzt sie anschließend mit (8) gleich, erhält man die *Kontinuitätsgleichung*.

$$\int_V d^3x\;\dot{\rho}(\boldsymbol{x}) \;=\; -\int_V d^3x\;\nabla\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{\rho}\;+\;\nabla\cdot\boldsymbol{j}\;=\;0 \tag{9}$$

Dieses Resultat setzt man jetzt in Gleichung (5) ein:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} \;=\; -\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int d^3x'\;\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|}}_{=\,4\pi\varepsilon_0\cdot\Phi(\boldsymbol{x})} \;=\; -\varepsilon_0\mu_0\,\dot{\Phi}(\boldsymbol{x})$$

Einsetzen in Gleichung (3) liefert mit (4)

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{B} \;&=\; \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \Delta\boldsymbol{A}\\ &=\; -\varepsilon_0\mu_0\nabla\partial_t\Phi + \mu_0\,\boldsymbol{j}\\ &=\; \varepsilon_0\mu_0\,\partial_t\boldsymbol{E} + \mu_0\,\boldsymbol{j}\end{aligned} \tag{10}$$

2.3.2 Induktion

1831 wurde von Faraday beobachtet, dass die Änderung eines Magnetfeldes, das eine Drahtschleife mit einer konstanten Fläche A durchsetzt, eine Spannung an den deren Enden induziert.

$$U_{ind} \;=\; \oint_{\partial A} d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{E} \;=\; -\int_A d\boldsymbol{A}\cdot\partial_t\boldsymbol{B}$$

Wendet man darauf noch den Satz von Stokes an, sind die vier Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik komplett:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} \;=\; \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,, \qquad \nabla\times\boldsymbol{E} \;=\; -\partial_t\boldsymbol{B}\,,$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} \;=\; 0\,, \qquad \nabla\times\boldsymbol{B} \;=\; \varepsilon_0\mu_0\,\partial_t\boldsymbol{E} \;+\; \mu_0\,\boldsymbol{j}$$