Ferienkurs Theoretische Mechanik Lösungen
Hamilton

Max Knötig

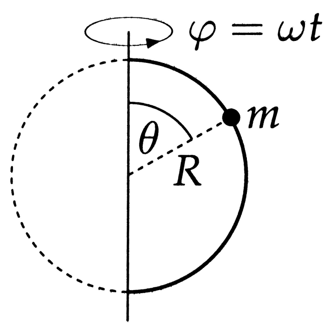
August 10, 2008

1 Hamiltonfunktion, Energie und Zeitabhängigkeit

1.1 Perle auf rotierendem Draht

Ein Teilchen sei auf einem halbkreisförmig rotierenden Draht angebracht und auf diesem frei beweglich. Der Draht rotiere mit konstantem ω um die fest vorgegebene Achse im kräftefreien Raum.

- Stelle die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ auf.
- Berechne damit die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ und stelle die kanonischen Gleichungen auf.
- Bestimme die Gesamtenergie E und berechne $\frac{dE}{dt}$. Was ist dafür die physikalische Begründung?
- Berechne $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$ und vergleiche $\mathcal{H}$ mit der Energie.



Lösung:

1. Lagrangefunktion, freies Teilchen, Kugelkoordinaten:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 sin^2\left(\vartheta\right)\dot{\varphi}^2\right)$$

Zwangsbedingungen einsetzen:

$$r = R \qquad \varphi = \omega t$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\vartheta}^2 + R^2 sin^2 (\vartheta) \omega^2 \right)$$

2. Hamiltonfunktion, es gibt nur einen Freiheitsgrad. Zuerst den kanonischen Impuls ausrechnen:

$$p_\vartheta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = m R^2 \dot{\vartheta}$$

Jetzt nach der Geschwindigkeit auflösen:

$$\dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{m R^2}$$

Die Definition der Hamiltonfunktion berechnen und die Geschwindigkeiten durch Impulse eliminieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= p_\vartheta \dot{\vartheta} - \mathcal{L} \\ &= \frac{p_\vartheta^2}{m R^2} - \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\vartheta}^2 + R^2 sin^2 (\vartheta) \omega^2 \right) \\ &= \frac{p_\vartheta^2}{2 m R^2} - \frac{1}{2} m R^2 sin^2 (\vartheta) \omega^2 \end{aligned}$$

Jetzt die kanonischen Gleichungen berechnen und zu einer einzigen Bewegungsgleichung zusammenführen:

$$\begin{aligned} \dot{p}_\vartheta &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vartheta} = m R^2 sin (\vartheta) cos (\vartheta) \omega^2 \\ \dot{\vartheta} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{m R^2} \\ &\Rightarrow \ddot{\vartheta} - sin (\vartheta) cos (\vartheta) \omega^2 = 0 \end{aligned}$$

Das ist die DGL für ϑ.

3. Da $\mathcal{L} = T = E$, weil $U = 0$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d\mathcal{L}}{dt} = m \left(R^2 \dot{\vartheta} \ddot{\vartheta} + R^2 \dot{\vartheta} sin (\vartheta) cos (\vartheta) \omega^2 \right) \\ &= m R^2 \dot{\vartheta} \underbrace{\left(\ddot{\vartheta} + sin (\vartheta) cos (\vartheta) \omega^2 \right)}_{\neq 0} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Das folgt aus der Bewegungsgleichung für ϑ (Man beachte das Plus!). Die physikalische Begründung ist natürlich, dass dem System Energie zu- und abgeführt wird, da sich der Draht konstant dreht.

4. Die totale Zeitableitung der Hamiltonfunktion ist gleich ihrer partiellen:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \\
andererseits: &= \frac{p_\vartheta \dot{p}_\vartheta}{mR^2} - \dot{\vartheta} m R^2 sin\left(\vartheta\right) cos\left(\vartheta\right) \omega^2 \\
&= \frac{p_\vartheta \dot{p}_\vartheta}{mR^2} - \frac{p_\vartheta \dot{p}_\vartheta}{mR^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Die Hamiltonfunktion ist also erhalten, die Energie aber nicht! Außerdem folgt daraus sofort:

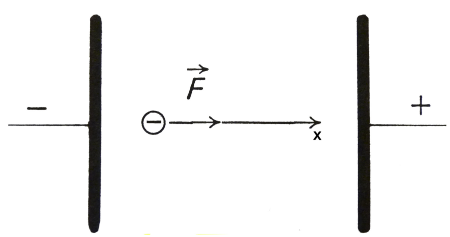
$$\mathcal{H} \neq E$$

Dieser Spieß wird in der nächsten Aufgabe umgedreht.

1.2 Elektron im Plattenkondensator

Ein Elektron bewege sich im kräftefreien Raum entlang der x-Achse senkrecht zu den Platten eines Plattenkondensators, dessen Spannung linear in der Zeit wächst.

- Zeige, dass das Potential die Form $U(x,t) = -Axt$ besitzt, wobei $A = const.$
- Stelle mit diesem Potential die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ auf.
- Berechne damit die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$, löse die kanonischen Gleichungen und berechne die Bahnkurve $x\left(t\right)$.
- Berechne $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$ explizit mithilfe der berechneten Bahnkurve $x\left(t\right)$. Vergleiche $\mathcal{H}$ mit der Energie. War es nötig die Lagrangefunktion zu bestimmen?



Lösung:

1. Der Plattenkondensator hat ein homogenes elektrisches Feld, welches hier $\propto t$ ist:

$$E = E_0 t$$

Daraus folgt sofort für das *elektrische* Potential:

$$\phi = \int E ds = -E_0 x t$$

Die Potentielle Energie muss abnehmen mit zunehmendem x, da das Elektron sich auf die positive Platte zubewegt. außerdem gilt für die Kraft im E-Feld:

$$F = qE$$

Daraus folgt natürlich unser Potential:

$$U = -Axt$$

2. Die Lagrangefunktion für ein eindimensionales Teilchen im Potential:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + Axt$$

3. Die Hamiltonfunktion für eine Koordinate, wieder nach Schema. Zuerst Impuls berechnen und nach Geschwindigkeit auflösen:

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$
$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= p_x\dot{x} - \mathcal{L} \\ &= \frac{p_x^2}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p_x}{m}\right)^2 - Axt \\ &= \frac{p_x^2}{2m} - Axt \end{aligned}$$

Jetzt die kanonischen Gleichungen aufstellen:

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = At$$
$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{p_x}{t}$$
$$\ddot{x} = \frac{At}{m}$$

Integration dieser DGL führt natürlich auf:

$$x(t) = \frac{1}{6}\frac{A}{m}t^3$$

4. Die totale Zeitableitung ist hier:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -Ax = -\frac{1}{6}\frac{A^2}{m}t^3$$

Alternativ kann man wie oben auch durchgeführt die Koordinate *und* den Impuls durch die Zeit ausdrücken und in die Hamiltonfunktion einsetzten und zuletzt nach der Zeit ableiten. Es (muss) kommt dasselbe heraus. Da hier das Potential geschwindigkeitsunabhängig ist und die Zwangsbedingungen skleronom (nämlich garkeine) sind:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= T + U \\ &= \frac{p_x^2}{2m} - Axt \\ &= E\end{aligned}$$

Die Hamiltonfunktion entspricht hier also der Energie und der Umweg über die Lagrangefunktion ist nicht nötig gewesen.

2 Zyklische Koordinaten

2.1 Kraft $\propto \frac{1}{\rho}$

Ein Teilchen bewege sich ohne weitere Einschränkung im zylindersymmetrischen Potential

$$U(\rho) = U_0 ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

- Wie lautet die Hamiltonfunktion in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)?
- Stelle die kanonischen Gleichungen auf.
- Welche Koordinaten sind zyklisch? Stelle drei Erhaltungssätze auf.

Lösung:

1. Die Hamiltonfunktion für skleronome Zwangsbedingungen und geschwindigkeitsunabhängiges Potential:

   $$\mathcal{H} = T + U$$

   Jetzt mithilfe der Tabelle aus der Vorlesung die kinetische Energie ausdrücken:

   $$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2\right) \\ U &= U_0 ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\end{aligned}$$

   Und zusammensetzen:

   $$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2\right) + U_0 ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

   Geht schneller, nicht? Geht natürlich nicht, wenn der Weg über die Lagrangegleichung gefordert ist.

2. Die kanonischen Bewegungsgleichungen führen auf:

$$\begin{array}{r|l} \dot{p}_\rho = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} = \frac{p_\varphi^2}{m\rho^3} - \frac{U_0}{\rho} & \dot{\rho} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{p}_\rho} = \frac{p_\rho}{m} \\ \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0 & \dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{p}_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \\ \dot{p}_z = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = 0 & \dot{z} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{p}_z} = \frac{p_z}{m} \end{array}$$

3. Die konstanten Impulse kann man sofort aus der Tabelle ablesen, es sind p_φ und p_z. Daraus folgt, dass φ und z zyklische Koordinaten sind

$$p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi} \quad \textit{Drehimpulssatz}$$
$$p_z = m\dot{z} \quad \textit{Impulssatz}$$

Weiterhin ist die Hamiltonfunktion nicht explizit von der Zeit abhängig, die Zwangsbedingungen skleronom und das Potential geschwindigkeitsunabhängig. Daraus folgt:

$$\mathcal{H} = E = const. \quad \textit{Energiesatz}$$

2.2 Homogenes Magnetfeld

Ein geladenes Teilchen bewege sich in einem homogenen Magnetfeld. Die Lagrangefunktion beschreibt die Bewegung:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - \frac{1}{2}q\dot{\mathbf{x}}\left(\mathbf{x} \times \mathbf{B}\right) \qquad \mathbf{B} = (0, 0, B)$$

- Berechne die konjugierten Impulse p_i und bestimme alle zyklischen Koordinaten.
- Welche p_i sind erhalten?

Lösung:

1. Zuerst das Kreuzprodukt und hintere Skalarprodukt in der Formel ausführen:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - \frac{1}{2}q\left(\dot{x}yB - \dot{y}xB\right)$$

Jetzt die Impulse p_i berechnen (Achtung - Wechsel in die Komponentenschreibweise):

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{1}{2}q\dot{y}B$$
$$p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{1}{2}q\dot{x}B$$
$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

Um die zyklischen Koordinaten ausrechnen bloß nicht die Hamiltonfunktion bestimmen! Die Lagrangefunktion hilft schon aus:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0$$

Daraus folgt, dass z zyklische Koordinate ist. Die anderen sind es nicht.

2. Ok, das war zu einfach: p_z ist erhalten. Anschaulich klar: Bewegungen parallel zum Magnetfeld werden nicht abgelenkt.

3 Legendre-Transformation und Poisson-Klammern

3.1 konstruiertes Beispiel

Betrachte die Hamiltonfunktion:

$$\mathcal{H} = p_1 p_2 + \omega^2 q_1 q_2$$

- Stelle die Bewegungsgleichungen auf, einmal mit Hilfe der kanonischen Gleichungen und einmal mit Hilfe der Poisson-Klammern.
- Berechne aus $\mathcal{H}$ die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ (Hinweis: kanonische Gleichungen!).
- Zeige, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen auf dieselben Bewegungsgleichungen führen. Welche Bewegung wird für $q_1(0) = \dot{q}_2(0) = R; \quad \dot{q}_1(0) = q_2(0) = 0$ in der $q_1 q_2$- Ebene vollzogen?

Lösung:

1. Mit den kanonischen Gleichungen:

$$\begin{array}{l|l} \dot{p}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = -\omega^2 q_2 & \dot{q}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} = p_2 \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2} = -\omega^2 q_1 & \dot{q}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2} = p_1 \end{array}$$

Mit den Poisson-Klammern und den Rechenregeln aus der Tabelle:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \{p_1, \mathcal{H}\} \\ Linearität &= \underbrace{\{p_1, p_1 p_2\}}_{0} + \omega^2 \{p_1, q_1 q_2\} \\ Produktregel &= \omega^2 \left(\underbrace{\{p_1, q_1\}}_{-1} q_2 + q_1 \underbrace{\{p_1, q_2\}}_{0} \right) \\ &= -\omega^2 q_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= \{q_1, \mathcal{H}\} \\
Linearit\ddot{a}t &= \{q_1, p_1 p_2\} + \omega^2 \underbrace{\{q_1, q_1 q_2\}}_{0} \\
Produktregel &= \{q_1, p_1\} p_2 + p_1 \{q_1, p_2\} \\
&= p_2
\end{aligned}
$$

Die anderen beiden folgen völlig analog und sind natürlich gleich Denen aus der Tabelle. Die zusammengesetzten Bewegungsgleichungen lauten:

$$\ddot{q}_1 + \omega^2 q_1 = 0$$

$$\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = 0$$

2. Die Legendretransformation von $\mathcal{H}$ bezüglich p_i liefert $\mathcal{L}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} p_i - \mathcal{H} \\
&= p_2 p_1 + p_1 p_2 - p_1 p_2 - \omega^2 q_1 q_2 \\
&= p_1 p_2 - \omega^2 q_1 q_2
\end{aligned}
$$

Mithilfe der kanonischen Gleichungen müssen wir nun die Impulse durch die Geschwindigkeiten eliminieren:

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} = p_2 \qquad \dot{q}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2} = p_1$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \omega q_1 q_2$$

3. Die Euler-Lagrange-Gleichungen für die berechnete Lagrangefunktion lauten:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= \ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = 0 \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} &= \ddot{q}_1 + \omega^2 q_1 = 0
\end{aligned}
$$

Sie stimmen mit den kanonischen Gleichungen überein. Die DGLs entsprechen offensichtlich zweier harmonischer Oszillationen:

$$
\begin{aligned}
q_1(t) &= A cos(\omega t) + B sin(\omega t) \\
q_2(t) &= C cos(\omega t) + D sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

Mit den gegebenen Anfangsbedingungen folgt für die Koeffizienten:

$$A = R; \qquad B = 0; \qquad C = 0; \qquad D = R$$

Und schließlich:

$$q_1\left(t\right) = Rcos\left(\omega t\right)$$
$$q_2(t) = Rsin\left(\omega t\right)$$

Eine Kreisbewegung mit der Frequenz ω und dem Radius R.

3.2 Poissonsches Theorem

Die Funktionen f und g seien Observablen und Erhaltungsgrößen. Beweise, dass die aus beiden Observablen gebildete Poissonklammer auch eine Erhaltungsgröße ist:

$$f, g = const. \quad \Rightarrow \quad \{f, g\} = const.$$

Hinweis: Für die Poisson-Klammer gilt die bekannte Produktregel der Differentialrechnung. Es gelte folgende Jakobi-Identität:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

Lösung:

1. Man soll nun nach der totalen Zeitableitung der Poison-Klammer suchen. Diese ist gegeben durch:

$$\frac{d}{dt}\left\{f, g\right\} = \left\{\left\{f, g\right\}, \mathcal{H}\right\} + \frac{\partial}{\partial t}\left\{f, g\right\}$$

Die Jakobi-Identität muss also umgestellt und beide Seiten mit -1 multipliziert werden werden:

$$\left\{\left\{f, g\right\}, h\right\} = -\left\{\left\{g, h\right\}, f\right\} - \left\{\left\{h, f\right\}, g\right\}$$

Diese Form hilft uns weiter, wir müssen zusätzlich die Produktregel auf den hinteren Teil anwenden:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{\left\{f, g\right\}, \mathcal{H}\right\} &= -\left\{\left\{g, \mathcal{H}\right\}, f\right\} - \left\{\left\{h, \mathcal{H}\right\}, g\right\} + \left\{\frac{\partial}{\partial t}f, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial}{\partial t}g\right\} \\
&= \left\{f, \{g, \mathcal{H}\} + \frac{\partial}{\partial t}g\right\} + \left\{g, \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial}{\partial t}f\right\} \\
&= \left\{f, \frac{d}{dt}g\right\} + \left\{g, \frac{d}{dt}f\right\} \\
&= \{f, 0\} + \{g, 0\} \\
&= 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

4 Phasenraum

Zeichne ein Phasenraumportrait eines Wurfes senkrecht nach oben im homogenen Schwerefeld der Erde - betrachte das Problem als eindimensional.

Lösung:

1. Die Lösung eines solchen Problems läuft immer über die Parametrisierung der Bahn, meist über die Energie. Die Hamiltonfunktion in diesem Fall lautet:
$$\mathcal{H} = T + U = \frac{1}{2m} p_x^2 + mgx = E$$
Da die Hamiltonfunktion nicht explizit von der Zeit abhängt ist diese erhalten. Diese implizite Form der Kurve im Phasenraum muss nurnoch nach p_x aufgelöst werden:
$$p_x = \pm\sqrt{2m\left(E - mgx\right)}$$
Diese Kurve entspricht also einer "normalen" Wurzelfunktion, sie hat eine Nullstelle bei $x = E/mg$ und sie geht durch die p_x-Achse bei $\pm\sqrt{2mE}$: