Ferienkurs Theoretische Mechanik
Übungsaufgaben Hamilton

Max Knötig

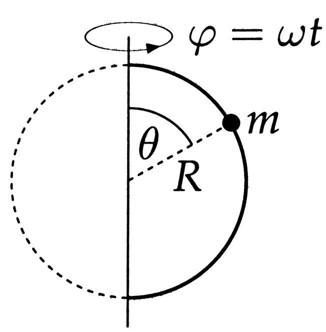
August 10, 2008

1 Hamiltonfunktion, Energie und Zeitabhängigkeit

1.1 Perle auf rotierendem Draht

Ein Teilchen sei auf einem halbkreisförmig rotierenden Draht angebracht und auf diesem frei beweglich. Der Draht rotiere mit konstantem ω um die fest vorgegebene Achse im kräftefreien Raum.

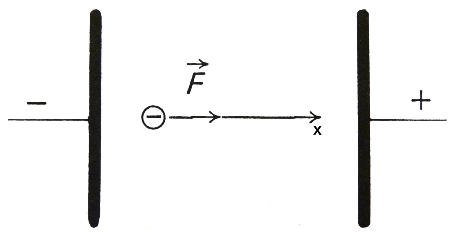
- Stelle die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ auf.
- Berechne damit die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ und stelle die kanonischen Gleichungen auf.
- Bestimme die Gesamtenergie E und berechne $\frac{dE}{dt}$. Was ist dafür die physikalische Begründung?
- Berechne $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$ und vergleiche $\mathcal{H}$ mit der Energie.



1.2 Elektron im Plattenkondensator

Ein Elektron bewege sich im kräftefreien Raum entlang der x-Achse senkrecht zu den Platten eines Plattenkondensators, dessen Spannung linear in der Zeit wächst.

- Zeige, dass das Potential die Form $U(x,t) = -Axt$ besitzt, wobei $A = const.$
- Stelle mit diesem Potential die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ auf.
- Berechne damit die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$, löse die kanonischen Gleichungen und berechne die Bahnkurve $x(t)$.
- Berechne $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$ explizit mithilfe der berechneten Bahnkurve $x(t)$. Vergleiche $\mathcal{H}$ mit der Energie. War es nötig die Lagrangefunktion zu bestimmen?



2 Zyklische Koordinaten

2.1 Kraft $\propto \frac{1}{\rho}$

Ein Teilchen bewege sich ohne weitere Einschränkung im zylindersymmetrischen Potential

$$U(\rho) = U_0 ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

- Wie lautet die Hamiltonfunktion in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)?
- Stelle die kanonischen Gleichungen auf.
- Welche Koordinaten sind zyklisch? Stelle drei Erhaltungssätze auf.

2.2 Homogenes Magnetfeld

Ein geladenes Teilchen bewege sich in einem homogenen Magnetfeld. Die Lagrangefunktion beschreibt die Bewegung:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - \frac{1}{2}q\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x} \times \mathbf{B}) \qquad \mathbf{B} = (0,0,B)$$

- Berechne die konjugierten Impulse p_i und bestimme alle zyklischen Koordinaten.
- Welche p_i sind erhalten?

3 Legendre-Transformation und Poisson-Klammern

3.1 konstruiertes Beispiel

Betrachte die Hamiltonfunktion:

$$\mathcal{H} = p_1 p_2 + \omega^2 q_1 q_2$$

- Stelle die Bewegungsgleichungen auf, einmal mit Hilfe der kanonischen Gleichungen und einmal mit Hilfe der Poisson-Klammern.
- Berechne aus $\mathcal{H}$ die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ (Hinweis: kanonische Gleichungen!).
- Zeige, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen auf dieselben Bewegungsgleichungen führen. Welche Bewegung wird für $q_1(0) = \dot{q}_2(0) = R; \quad \dot{q}_1(0) = q_2(0) = 0$ in der $q_1 q_2$- Ebene vollzogen?

3.2 Poissonsches Theorem

Die Funktionen f und g seien Observablen und Erhaltungsgrößen. Beweise, dass die aus beiden Observablen gebildete Poissonklammer auch eine Erhaltungsgröße ist:

$$f, g = const. \quad \Rightarrow \quad \{f, g\} = const.$$

Hinweis: Für die Poisson-Klammer gilt die bekannte Produktregel der Differentialrechnung. Außerdem gilt folgende Jakobi-Identität:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

4 Phasenraum

Zeichne ein Phasenraumportrait eines Wurfes senkrecht nach oben im homogenen Schwerefeld der Erde - betrachte das Problem als eindimensional.