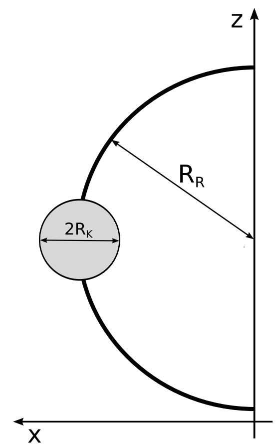
Dominik Fauser **Blatt 3**

Repetitorium Theoretische Mechanik, SS 2008

1 Aufgaben zum selbständigen Lösen

1.1 Ring mit Kugel

Ein Ring, auf dem eine Kugel angebracht ist, rotiert um die z-Achse. Der Ring selbst besteht aus einem Draht mit der Längendichte λ. Die (homogene) Kugel hat die Masse m_K.



(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Kugel.

(b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Rings mithilfe eines Linienintegrals.

(c) Geben Sie einen Ausdruck für das gesamte Trägheitsmoment an.

$$\int dx\ \sin^2 x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$
$$\int dx\ \sin^3 x = \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + C$$

Lösung

Im Folgenden bezeichnet $r_\perp$ den senkrechten Abstand von der Drehachse. Außerdem benötigt man folgende Integrale:

$$\int dx\ \sin^2 x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$
$$\int dx\ \sin^3 x = \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + C$$

(a) Berechnung des Trägheitsmoments einer homogenen Kugel: (Da die Kugel rotationssymmetrisch bezüglich jeder beliebigen Drehachse ist, sind alle Trägheitsmomente gleich und der Trägheitstensor ist immer diagonal)

$$\begin{aligned}
I_K &= \int_V dm\, r_\perp^2 \\
&= \int_V d^3r\, \rho(\mathbf{r})\, r_\perp^2 \\
&= \int_0^{R_K} dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\ r^2 \sin\theta \cdot \rho\, r^2 \sin^2\theta \\
&= 2\pi\rho \int_0^{R_K} dr\ r^4 \int_0^{\pi} d\theta\ \sin^3\theta \\
&= 2\pi\rho \cdot \frac{1}{5}R_K^5 \cdot \frac{4}{3} \\
&= \frac{4}{3}R_K^3\pi\rho \cdot \frac{2}{5}R_K^2 \\
&= \frac{2}{5}m_K R_K^2
\end{aligned}$$

(b) Zunächst muß man den Ring R über den Winkel θ parametrisieren:

$$\mathbf{r}:\ [0,\pi] \to R \subset \mathbb{R}^2, \quad \theta \ \mapsto \ \mathbf{r}(\theta) = (R_R\cos\theta,\ R_R\sin\theta)$$

Das Trägheitsmoment lautet

$$I_R = \int_R dm\ x^2 = \int_R ds\ \lambda\, x^2$$

Für das Wegelement ds gilt:

$$ds \ = \ \|d\mathbf{r}\| \ = \ \|\mathbf{r}(\theta+d\theta) - \mathbf{r}(\theta)\| \ = \ \|\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\|\ d\theta$$

Für die Norm der Ableitung erhält man:

$$\|\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\| \ = \ \|(-R_R\sin\theta,\ R_R\cos\theta)\| \ = \ \sqrt{R_R^2\sin^2\theta + R_R^2\cos^2\theta} \ = \ R_R$$

Aus $x^2 = R_R^2\sin^2\theta$ folgt schließlich:

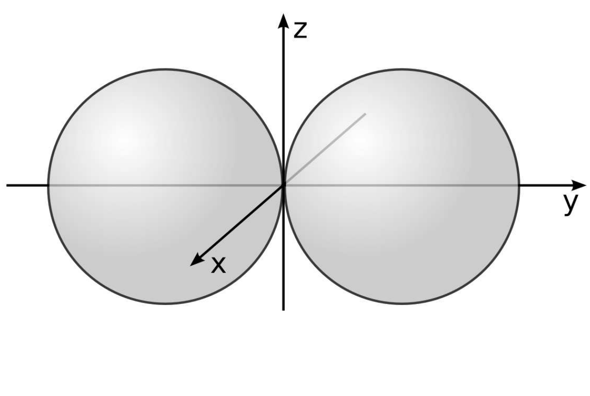
$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^\pi d\theta\ \lambda R_R^3\ \sin^2\theta \\ &= \lambda\pi R_R^3 \\ &= m_R R_R^2 \end{aligned}$$

(c) Aus dem Satz von Steiner und der Summe der eben berechneten Trägheitsmomente erhält man schließlich das gesamte Trägheitsmoment

$$I_{ges} = I_R + I_K + m_K R_R^2$$

1.2 Zwei Kugeln

Berechnen Sie den Trägheitstensor von zwei identischen Kugeln, die am Ursprung zusammengeklebt sind und jeweils den Radius R sowie die Masse M haben.



Lösung

Das Trägheitsmoment jeder Kugel ist

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

Aus Symmetriegründen ist der Trägheitstensor offensichtlich diagonal. Da die Schwerpunkte der Kugeln bei $y = -R$ und $y = R$ liegen, muss man den Satz von STEINER anwenden. Es ergeben sich folgende Hauptträgheitsmomente:

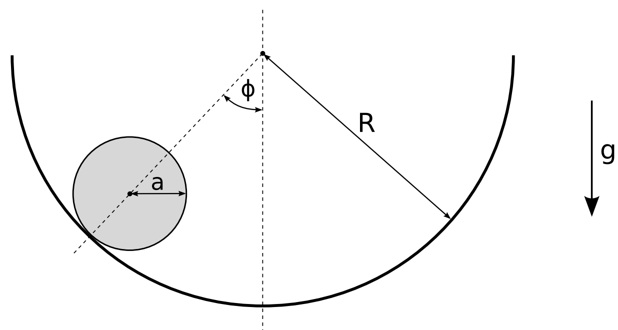
$$I_{11} = I_{33} = 2 \cdot (\frac{2}{5}MR^2 + MR^2) = 2 \cdot \frac{7}{5}MR^2\,, \quad I_{22} = 2 \cdot \frac{2}{5}MR^2$$

In Matrixschreibweise lautet der Trägheitstensor folglich:

$$\mathbf{I} = \frac{2}{5}MR^2 \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = I \cdot \mathrm{diag}(7, 2, 7)$$

1.3 Rollender Zylinder in einem Zylinder

Ein homogener Zylinder mit der Masse M und dem Radius a rollt, ohne zu gleiten und unter dem Einfluss der Erdanziehungskraft, auf einer festen Zylinderoberfläche mit dem Radius R.



(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Zylinders.

(b) Geben Sie die LAGRANGE-Funktion in Abhängigkeit von ϕ und $\dot{\phi}$ an und berechnen Sie daraus die Bewegungsgleichung.

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen um die Gleichgewichtslage und zeigen Sie, dass man eine Schwingung mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-a}}$$

erhält.

Lösung

(a) Wir nehmen die z-Achse des Zylinders als Symmetrieachse an, ausserdem benutzen wir natürlich Zylinderkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_Z d^3r\ \rho(\vec{r})\ (x^2+y^2) \\
&= \int_Z d^3r\ \rho(\vec{r})\ (r^2\cos(\phi)^2 + r^2\sin(\phi)^2) \\
&= \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz\ r^3\rho_0 \\
&= \frac{1}{4}a^4\ \cdot\ 2\pi\ \cdot\ L\rho_0 \\
&= \frac{1}{2}Ma^2
\end{aligned}
$$

(b) Das problematische an dieser Aufgabe ist das Aufstellen der korrekten Beziehung zwischen ϕ und der Rotationsgeschwindigkeit des Zylinders ω. Aus der Rollbedingung $v = r\omega$ folgt mit $r \equiv a$:

$$\omega = \frac{v}{a} = \frac{R-a}{a}\,\dot{\phi}$$

Die kinetische Energie ist die Summe der Rotations- und der Translationsenergie

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 \\
&= \frac{1}{4}Ma^2\omega^2 + \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 \\
&= \frac{1}{4}Ma^2\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 \\
&= \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2
\end{aligned}
$$

Bei der potentiellen Energie ist das Minuszeichen zu beachten. Setzt man $U(\phi=0)=0$, kann man sich diese Tatsache nochmal folgendermassen klarmachen:

$$U = Mgh = Mg(R-a)(1-\cos\phi) = -Mg(R-a)\cos\phi + \text{const.}$$

Die LAGRANGE-Funktion lautet also

$$L(\phi,\dot{\phi}) = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi$$

Aus der EULER-LAGRANGE-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0$$

folgt dann die Bewegungsgleichung

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{2}M(R-a)^2\ddot{\phi} + Mg(R-a)\sin\phi = 0 \\
\ddot{\phi} + \frac{2}{3}\frac{g}{R-a}\sin\phi = 0
\end{aligned}
$$

(c) Unter Verwendung der Kleinwinkelnäherung ($\sin\phi \approx \phi$) wird die Bewegungsgleichung zu

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{3}\frac{g}{R-a}\,\phi = 0$$

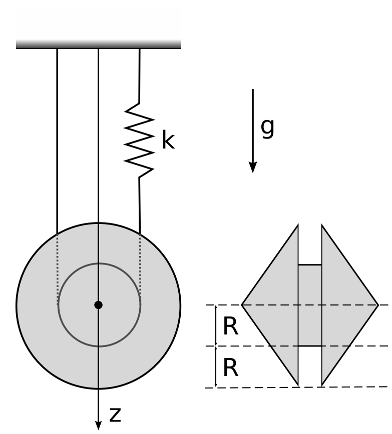
Als Lösung erhält man also

$$\phi(t) = \phi_0\cos(\omega t + \psi), \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-a}}$$

ϕ_0 und ψ ergeben sich dabei aus den Anfangsbedingungen.

1.4 Schwingung

Ein homogener Körper, der aus zwei Kegeln und einem Zylinder zusammengesetzt ist, hängt in einem Seil, das an der Decke befestigt und zusätzlich mit einer Feder versehen ist. Unter dem Einfluss der Gravitation kann dieser Körper auf- und abhüpfen wobei er sich gleichzeitig dreht, da wir annehmen, dass das Seil nicht gleitet. Die Masse der Kegel beträgt jeweils M, die des Zylinders $2/5\ M$. Die Feder hat die Federkonstante k.



(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Kegels und geben Sie damit einen Ausdruck für das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Körpers an.

(b) Geben Sie die LAGRANGE-Funktion in Abhängigkeit von z und $\dot{z}$ an und bestimmen Sie daraus die Bewegungsgleichung.

(c) Zeigen Sie, dass die Lösung der Bewegungsgleichung eine Schwingung ist und geben Sie deren Frequenz an.

Lösung

(a) Man betrachte einen Kegel K mit der Höhe L und dem Radius R. Integriert wird im Folgenden von der Spitze ($z = 0$) zur Grundfläche ($z = L$) in Zylinderkoordinaten. Es gilt

$$\frac{R}{L} = \frac{r}{z}$$

wobei r und z die Integrationsvariablen sind. Das Trägheitsmoment lautet folglich:

$$\begin{aligned}
I_{33} &= \int_K d^3r\ \rho(\vec{r})\ (x^2 + y^2) \\
&= \rho_0 \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{R}{L}z} dr\ r^3 \\
&= 2\pi\rho_0 \int_0^L dz\ \frac{1}{4}\frac{R^4}{L^4}\ z^4 \\
&= \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{3} R^2 \pi L \rho_0 \cdot R^2 \\
&= \frac{3}{10} M R^2
\end{aligned}$$

Für das gesamte Trägheitsmoment erhält man schließlich

$$I \ \equiv\ I_{ges} \ =\ 2 \cdot \frac{3}{10} M (2R)^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5} M R^2 \ =\ \frac{13}{5} M R^2$$

(b) Unter Verwendung von $\omega = \frac{\dot{z}}{R}$ ergibt sich für die kinetische Energie

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2}\frac{12}{5} M\ \dot{z}^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{13}{5} M R^2\ \frac{\dot{z}^2}{R^2} + \frac{6}{5} M \dot{z}^2 \\
&= \frac{5}{2} M \dot{z}^2
\end{aligned}$$

Bei der potentiellen Energie muss man beachten, dass sich die Feder doppelt so schnell dehnt wie der Körper sich bewegt und dass die Gewichtskraft in positiver z-Richtung angreift. Dann ergibt sich

$$U = -\frac{12}{5}Mgz + \frac{1}{2}k(2z)^2$$

Die LAGRANGE-Funktion lautet also

$$L(z, \dot{z}) = \frac{5}{2}M\dot{z}^2 + \frac{12}{5}Mgz - 2kz^2$$

Aus der EULER-LAGRANGE-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

folgt dann die Bewegungsgleichung

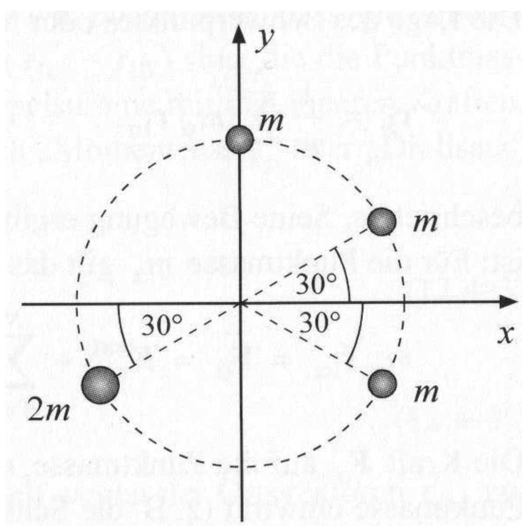
$$5M\ddot{z} + 4kz - \frac{12}{5}Mg = 0$$
$$\ddot{z} + \frac{4k}{5M}z = \frac{12}{25}g$$

Es handelt sich also um eine Schwingung mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{4k}{5M}}$$

2 Hauptachsensystem und Richtung des Drehimpulses

Ein starrer Körper dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\widehat{e_z}$um die z-Achse, die mit der körperfesten z-Achse zusammenfällt. Der Körper hat folgende Massenverteilung in der x-y-Ebene senkrecht zur Drehachse. Alle Massen befinden sich im Abstand r_0 vom Ursprung.



(a) Berechnen Sie den Trägheitstensor dieses Systems. Ist er diagonal? Stellen Sie eine Vermutung über die Hauptträgheitsachsen an. Bestätigen Sie diese Annahme.

(b) Welche Richtung hat der Drehimpuls $\vec{L}$ im ursprünglichen System?

Lösung

(a) Wir berechnen wiedermal den Trägheitstensor mit der Formel

$$I_{ij} = \int d^3r\,\rho(\vec{r})\,(r^2\delta_{ij} - x_i x_j)$$

Zunächst stellen wir die Massendichte des Punktsystems in kartesischen Koordinaten auf:

$$\rho(\vec{r}) = m\,\delta(z)[\delta(x)\delta(y-r_0)+\delta(x-\frac{\sqrt{3}}{2}r_0)\delta(y-\frac{r_0}{2})+2\delta(x+\frac{\sqrt{3}}{2}r_0)\delta(y+\frac{r_0}{2})+\delta(x-\frac{\sqrt{3}}{2}r_0)\delta(y+\frac{r_0}{2})]$$

Damit ergibt sich:

$$I_{11} = \int d^3r\,\rho(\vec{r})\,(y^2+z^2) \overset{z=0}{\equiv} \int d^3r\,\rho(\vec{r})\,y^2 = m(r_0^2+\frac{r_0^2}{4}+2\frac{r_0^2}{4}+\frac{r_0^2}{4}) = 2mr_0^2$$

$$I_{22} = \int d^3r\,\rho(\vec{r})\,(x^2+z^2) \overset{z=0}{\equiv} \int d^3r\,\rho(\vec{r})\,x^2 = m(\frac{3}{4}r_0^2+2\frac{3}{4}r_0^2+\frac{3}{4}r_0^2) = 3mr_0^2$$

$$I_{33} = \int d^3r\,\rho(\vec{r})\,(x^2+y^2) = \int d^3r\,\rho(\vec{r})\,x^2 = m(r_0^2+\frac{r_0^2}{4}+2\frac{r_0^2}{4}+\frac{r_0^2}{4}+\frac{3}{4}r_0^2+2\frac{3}{4}r_0^2+\frac{3}{4}r_0^2) = 5mr_0^2$$

Man sieht, dass gilt: $I_{33} = I_{11} + I_{22}$ - dies ist generell für Massenverteilungen mit $z = 0\,\forall m_i$ so!

$$I_{12} = -\int d^3r\,\rho(\vec{r})\,xy = -m(0+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}r_0^2+2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}r_0^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}r_0^2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}mr_0^2 = I_{21} \text{ da } \mathbf{I} \text{ symmetrisch}$$

$$I_{23} = I_{32} = -\int d^3r\,\rho(\vec{r})\,yz \overset{z=0}{\equiv} 0$$

$$I_{13} = I_{31} = -\int d^3r\,\rho(\vec{r})\,xz \overset{z=0}{\equiv} 0$$

Also haben wir folgenden Trägheitstensor

$$\mathbf{I} = mr_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Der Trägheitstensor ist <u>nicht</u> diagonal, das x-y-System ist also <u>nicht</u> das Hauptachsensystem. Um dieses zu finden, setzen wir das Eigenwertproblem an (Der Einfachheit halber lassen wir den Vorfaktor weg):

$$\mathbf{I}\cdot\vec{v_i} = \lambda\cdot\vec{v_i}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix}\cdot\vec{v_i} = 0$$

Das charakteristische Polynom ergibt die Eigenwerte der Matrix:

$$0 = (5-\lambda)\cdot[(2-\lambda)(3-\lambda)-\frac{3}{4}] = (5-\lambda)\cdot(\frac{7}{2}-\lambda)\cdot(\frac{3}{2}-\lambda)$$

Der diagonalisierte Trägheitstensor hat also die Hauptträgheitsmomente $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = \frac{7}{2},\ \lambda_3 = \frac{3}{2}$.

Die Eigenvektoren ergeben sich aus folgender Bedingung, wobei λ_i die verschiedenen Eigenwerte durchläuft:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_i & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 3-\lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda_i \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = 0$$

Es ergeben sich folgende (normierte) Eigenvektoren:

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Eigenvektoren ordnet man als Spaltenvektoren zur Transformationsmatrix an:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe von $\mathbf{S}$ lässt sich der Trägheitstensor diagonalisieren: $\mathbf{I}_{diag} = \mathbf{S}^T \mathbf{I}\,\mathbf{S}$.

$$\mathbf{I}_{diag} = mr_0^2 \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Im ursprünglichen System ist der Trägheitstensor nicht diagonal, er hatte die Form:

$$\mathbf{I} = mr_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\widehat{e_z}$ hat jedoch nur eine z-Komponente, also ergibt sich für den Drehimpuls:

$$\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega} = mr_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5\omega \end{pmatrix}$$

Der Drehimpulsvektor liegt also immer, d.h. auch bei nichtdiagonalem Trägheitstensor, auf der Drehachse/z-Achse und ist bei konstanter Winkelgeschwindigkeit konstant. Dies liegt daran, dass unabhängig von der Wahl der Achsen in der x-y-Ebene der Schwerpunkt des Systems immer auf der z-Achse liegt.