Dominik Fauser

Ferienkurs Theoretische Mechanik, SS 2008

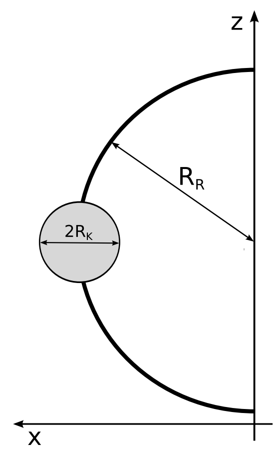
1 Ring mit Kugel

Ein Ring, auf dem eine Kugel angebracht ist, rotiert um die z-Achse. Der Ring selbst besteht aus einem Draht mit der Längendichte λ. Die (homogene) Kugel hat die Masse m_K.

(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Kugel.

(b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Rings mithilfe eines Linienintegrals.

(c) Geben Sie einen Ausdruck für das gesamte Trägheitsmoment an.

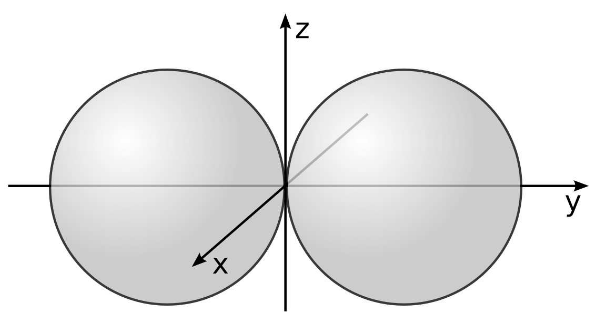


$$\int dx\ \sin^2 x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\int dx\ \sin^3 x = \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + C$$

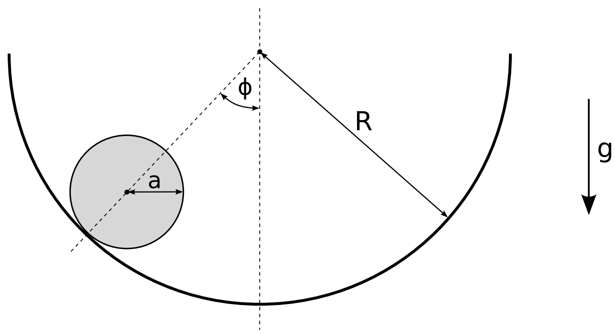
2 Zwei Kugeln

Berechnen Sie den Trägheitstensor von zwei identischen Kugeln, die am Ursprung zusammengeklebt sind und jeweils den Radius R sowie die Masse M haben.



3 Rollender Zylinder in einem Zylinder

Ein homogener Zylinder mit der Masse M und dem Radius a rollt, ohne zu gleiten und unter dem Einfluss der Erdanziehungskraft, auf einer festen Zylinderoberfläche mit dem Radius R.



(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Zylinders.

(b) Geben Sie die LAGRANGE-Funktion in Abhängigkeit von ϕ und $\dot{\phi}$ an und berechnen Sie daraus die Bewegungsgleichung.

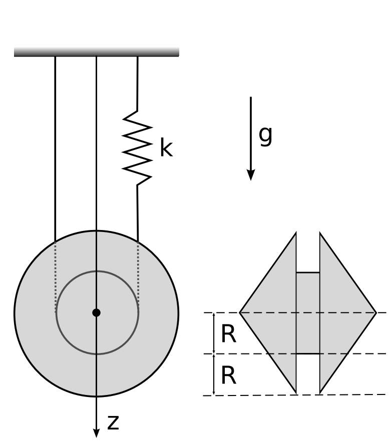
(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen um die Gleichgewichtslage und zeigen Sie, dass man eine Schwingung mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-a}}$$

erhält.

4 Schwingung

Ein homogener Körper, der aus zwei Kegel und einem Zylinder zusammengesetzt ist, hängt in einem Seil, das an der Decke befestigt und zusätzlich mit einer Feder versehen ist. Unter dem Einfluss der Gravitation kann dieser Körper auf und ab hüpfen wobei er sich gleichzeitig dreht, da wir annehmen, dass das Seil nicht gleitet. Die Masse der Kegel beträgt jeweils M, die des Zylinders $2/5\ M$. Die Feder hat die Federkonstante k.



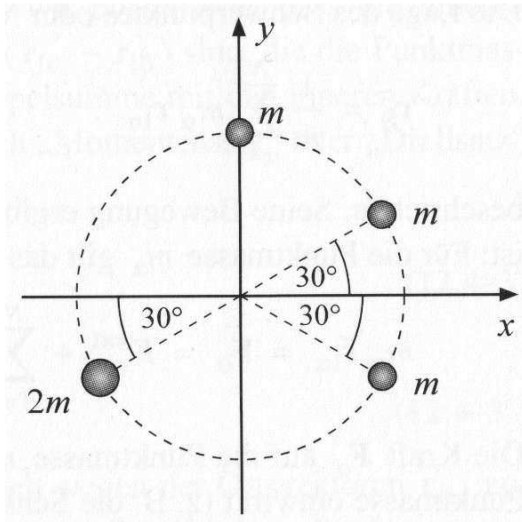
(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Kegels und geben Sie damit einen Ausdruck für das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Körpers an.

(b) Geben Sie die LAGRANGE-Funktion in Abhängigkeit von z und $\dot{z}$ an und bestimmen Sie daraus die Bewegungsgleichung.

(c) Zeigen Sie, dass die Lösung der Bewegungsgleichung eine Schwingung ist und geben Sie deren Frequenz an.

5 Hauptachsensystem und Richtung des Drehimpulses

Ein starrer Körper dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \widehat{e_z}$ um die z-Achse, die mit der körperfesten z-Achse zusammenfällt. Der Körper hat folgende Massenverteilung in der x-y-Ebene senkrecht zur Drehachse. Alle Massen befinden sich im Abstand r_0 vom Ursprung.



(a) Berechnen Sie den Trägheitstensor dieses Systems. Ist er diagonal? Stellen Sie eine Vermutung über die Hauptträgheitsachsen an. Bestätigen Sie diese Annahme.

(b) Welche Richtung hat der Drehimpuls $\vec{L}$ im ursprünglichen System?