

Der starre Körper

Dominik Fauser

1 Grundlagen

1.1 Definition

Als einen *starren Körper* bezeichnet man ein System von Massepunkten m_i , deren Abstände zueinander konstant sind: $|r_{ij}| = |r_i - r_j|$.

Meist betrachtet man eine sehr große Anzahl von Massepunkten, so dass sich eine Massendichte $\varrho(\vec{r})$ definieren lässt:

$$\varrho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm(\vec{r})}{dV} \quad (1)$$

Die Gesamtmasse des starren Körpers mit der Massendichte $\varrho(\vec{r})$ ergibt sich dann aus:

$$M = \int d^3r \varrho(\vec{r}) \quad (2)$$

In dieser Definition ist der Spezialfall einer diskreten Masseverteilung, formuliert durch die Dirac'sche Deltafunktion, enthalten:

$$\varrho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N m_i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (3)$$

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \int d^3r \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N m_i \quad (4)$$

1.2 Freiheitsgrade

Um die maximale Anzahl der Bewegungsgleichungen eines starren Körpers zu bestimmen, ist die Anzahl der Freiheitsgrade von Interesse. Betrachte dazu folgendes Beispiel:

Ein System von $N = 3$ Massepunkten wird durch 9 kartesische Koordinaten beschrieben. Aus der Definition folgen 3 Zwangsbedingungen $|r_{ij}| = |r_i - r_j|$, die den Abstand der Massepunkte zueinander festlegen. Somit bleiben noch $f = 3N - 3 = 6$ Freiheitsgrade. Fügt man nun weitere Massepunkte zu diesem System hinzu, treten automatisch drei weitere Zwangsbedingungen auf. Es folgt:

$$\boxed{\text{Freiheitsgrade des starren Körpers: } f = 6} \quad (5)$$

Intuitive Begründung: Die Lage eines beliebigen starren Körpers im Raum lässt sich durch die Lage eines Fixpunkts (drei Koordinaten x, y, z) sowie die Orientierung (drei Winkel, z.B. ϕ, ψ, θ) relativ zu einem raumfesten Inertialsystem eindeutig charakterisieren.

1.3 Bezugssysteme

Zur Beschreibung der Dynamik des starren Körpers wählt man ein raumfestes Inertialsystem \mathbf{R} und ein fest an den Körper gebundenes Körpersystem \mathbf{K} . Zur weiteren Unterscheidung wähle folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \text{Raumfestes } \mathbf{R}\text{-System: } & X, Y, Z \text{ bzw. } \vec{R} \\ \text{Körperfestes } \mathbf{K}\text{-System: } & x, y, z \text{ bzw. } \vec{r} \end{aligned}$$

Hierbei ist das Körpersystem \mathbf{K} natürlich kein Inertialsystem, da sich Lage (Translation) und Orientierung (Rotation) im Raum bei der Bewegung ständig ändern. Außerdem ist sein Ursprung (Fixpunkt) im starren Körper zunächst beliebig wählbar. Diesen Umstand nutzt man später aus, um die Bewegungsgleichungen zu vereinfachen.

2 Die Lagrangefunktion des starren Körpers

Um den starren Körper mit dem Lagrangeformalismus behandeln zu können, müssen wir nun die Form der kinetischen Energie zur Verwendung in der Lagrangefunktion bestimmen. Dies geschieht mit Hilfe der soeben definierten Bezugssysteme, indem man die Bewegung des Körpersystems \mathbf{K} im raumfesten System \mathbf{R} ausdrückt.

2.1 Koordinaten eines Punktes im \mathbf{R} -System

Ein beliebiger Punkt des \mathbf{R} -Systems hat im \mathbf{K} -System folgenden Ortsvektor:

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r} \tag{6}$$

Meist wählt man für \vec{R}_0 den Schwerpunkt des starren Körpers:

$$\vec{R}_0 = \frac{1}{M} \int d^3r \vec{r} \varrho(\vec{r}) \equiv \vec{R}_S \tag{7}$$

Der Schwerpunkt des starren Körpers führt relativ zum \mathbf{R} -System eine normale Translation aus:

$$\frac{d\vec{R}_0}{dt} = \vec{V} \tag{8}$$

Im \mathbf{K} -System liegt bezüglich des Ursprungs eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ vor:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{9}$$

Der Vektor $\vec{\omega}$ steht dabei immer senkrecht auf der Drehebene.

Insgesamt ergibt sich für die Geschwindigkeit im \mathbf{R} -System:

$$\boxed{\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}} \quad (10)$$

2.2 Kinetische Energie

Die kinetische Energie im raumfesten \mathbf{R} -System lässt sich mit der soeben definierten Geschwindigkeit $\frac{d\vec{R}}{dt}$ berechnen:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{V}^2 + \underbrace{\sum_i m_i \vec{V} (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)}_{=0} + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, dass im Schwerpunktsystem $\sum_i m_i \vec{r}_i = 0$ gilt. Deshalb reduziert sich die kinetische Energie auf folgende Form:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{V}^2}_{T_{trans}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i [\vec{\omega}^2 r_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2]}_{T_{rot}} \quad (11)$$

Die eingeklammerte Term in der Rotationsenergie lässt sich nun folgendermaßen umformen:

$$\vec{\omega}^2 r_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2 = \sum_{\alpha\beta} [\omega_\alpha \omega_\beta r^2 \delta_{\alpha\beta} - \omega_\alpha x_\alpha \omega_\beta x_\beta] \quad (12)$$

$$= \sum_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta [r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta] \quad (13)$$

Daraus folgt die Definition des Trägheitstensors \mathbf{I} für diskrete und kontinuierliche Massenverteilungen:

$$\boxed{I_{\alpha\beta} = \sum_i m_i [r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta]} \quad (14)$$

$$\boxed{I_{\alpha\beta} = \int d^3r \rho(\vec{r}) [r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta]} \quad (15)$$

Mithilfe des Trägheitstensors lässt sich die kinetische Energie nun mit dem Trägheitstensor schreiben:

$$\vec{T} = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta \quad (16)$$

$$\vec{T} = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbf{I} \vec{\omega} \quad (17)$$

2.3 Die Lagrangefunktion für den starren Körper

Mit der Definition des Trägheitstensors lautet die Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta - U \quad (18)$$

2.4 Drehimpuls

Analog zur kinetischen Energie bestimmt man den Drehimpuls des starren Körpers im raumfesten System \mathbf{R} :

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i \vec{R}_i \times \frac{d\vec{R}_i}{dt} \\ &= \sum_i m_i (\vec{R}_0 + \vec{r}_i) \times (\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\ &= \sum_i m_i \vec{R}_0 \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\ &= M \vec{R}_0 \times \vec{V} + \sum_i m_i [\vec{r}_i^2 \vec{\omega} - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})] \\ &= \vec{L}_{Schwerpunkt} + \vec{L}_{rot} \end{aligned}$$

Dass es sich beim zweiten Term um eine Rotation des starren Körpers bezüglich seines Schwerpunkts handelt, erkennt man in komponentenweiser Darstellung:

$$\begin{aligned} (\vec{L}_{rot})_\alpha &= \sum_i m_i [\vec{r}_i^2 \omega_i - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})] \\ &= \sum_i m_i \sum_\beta [\vec{r}_i^2 \omega_i - x_\alpha (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})] \\ &= \sum_\beta \underbrace{\sum_i m_i [\vec{r}_i^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{i,\alpha} x_{i,\beta}]}_{I_{\alpha\beta}} \omega_\beta \end{aligned}$$

Der allgemeine Drehimpuls eines starren Körpers setzt sich also aus zwei Anteilen zusammen: $\vec{L}_{Schwerpunkt}$ ist der Drehimpuls des Schwerpunktes des starren Körpers bezüglich des Ursprungs von \mathbf{R} und hängt offensichtlich von der Wahl des raumfesten Systems ab. \vec{L}_{rot} ist der ‘‘Eigendrehimpuls’’ des starren Körpers bezüglich seines eigenen Schwerpunktes und lässt sich analog zur kinetischen Energie mit dem Trägheitstensor schreiben:

$$\vec{L}_{rot} = \mathbf{I} \vec{\omega} \quad (19)$$

$$(\vec{L}_{rot})_i = \sum_\beta I_{\alpha\beta} \omega_\beta \quad (20)$$

3 Der Trägheitstensor

3.1 Allgemeine Eigenschaften

In Matrixform sieht der Trägheitstensor folgendermaßen aus:

$$I_{\alpha\beta} = \int d^3r \rho(\vec{r}) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

- **I** ist symmetrisch: $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$ - Der Trägheitstensor hat also insgesamt nur 6 unabhängige Komponenten
- **I** ist additiv: Wenn ein starrer Körper aus mehreren verschiedenartigen Objekten zusammengesetzt ist, addieren sich die Trägheitsmomente der einzelnen Bestandteile (siehe Übung)
- **I** lässt sich diagonalisieren (siehe 3.3)

3.1.1 Tipps zur Berechnung

- Wähle dem Körper entsprechend geeignete Koordinaten (z.B. Kegel - Zylinderkoordinaten)
- Beim Übergang zu diesen Koordinaten beachte die Jacobi-Determinante im Volumenintegral:

$$\int dx dy dz = \int dq_1 dq_2 dq_3 \left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \right| \quad (22)$$

- Die beiden wichtigsten Formeln sind:

$$\int dx dy dz = \int dr d\varphi d\theta r^2 \sin \theta \quad (23)$$

$$\int dx dy dz = \int dr d\varphi dz r \quad (24)$$

3.2 Satz von Steiner

Frage: Welchen Wert hat das Trägheitsmoment bezüglich einer nicht durch den Schwerpunkt gehenden Achse?

Beispiel: Kugel rollt schiefe Ebene hinab - momentane Drehachse ist der Auflagepunkt

Wir betrachten ein um den konstanten Vektor \vec{a} verschobenes System **K'** mit $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$:

$$I'_{\alpha\beta} = \sum_i m_i [(\vec{r}_i - \vec{a})^2 \delta_{\alpha\beta} - (x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta)] \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
I'_{\alpha\beta} &= \sum_i m_i [(\vec{r}_i - \vec{a})^2 \delta_{\alpha\beta} - (x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta)] \\
&= \sum_i m_i [\vec{r}_i^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta] + \sum_i m_i [\vec{a}^2 \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta] - \underbrace{2\vec{a} \sum_i m_i \vec{r}_i}_{=0} + \underbrace{a_\alpha \sum_i m_i x_{\beta,i}}_{=0} + \underbrace{a_\beta \sum_i m_i x_{\alpha,i}}_{=0} \\
&= \sum_i m_i [\vec{r}_i^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta] + \sum_i m_i [\vec{a}^2 \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta]
\end{aligned}$$

Hier wurde wieder die Definition des Schwerpunkts $\sum_i m_i x_i = 0$ ausgenutzt. Vereinfacht folgt:

$$\boxed{I'_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} + M [\vec{a}^2 \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta]} \quad \text{Satz von Steiner} \quad (26)$$

3.3 Hauptachsentransformation

- Wie aus der linearen Algebra bekannt, ist jede reelle, symmetrische Matrix diagonalisierbar. Mathematisch entspricht das einem Basiswechsel mit Hilfe einer geeigneten Transformationsmatrix \mathbf{S} :

$$\mathbf{I}_{\text{diag}} = \mathbf{S}^T \mathbf{I} \mathbf{S}. \quad (27)$$

- Physikalisch bedeutet dies einen Wechsel vom Körpersystem \mathbf{K} in ein gedrehtes System \mathbf{K}' , in dem die Außerdiagonalelemente des Trägheitstensors verschwinden.
- Die geeignete Transformationsmatrix \mathbf{S} lässt sich durch Lösung des folgenden Eigenwertproblems finden:

$$\mathbf{I} \cdot \vec{v}_i = \lambda \cdot \vec{v}_i \quad (28)$$

Die zur Diagonalisierung notwendige Transformationsmatrix \mathbf{S} enthält dann als Spaltenvektoren die Eigenvektoren \vec{v}_i zu den jeweiligen Eigenwerten λ_i .

- Die Eigenwerte λ_i sind die Hauptträgheitsmomente I_i und die zugehörigen Eigenvektoren \vec{v}_i geben die Richtung der Hauptträgheitsachsen an. (siehe Übung)
- Besitzt ein Körper eine Symmetrieachse bezüglich Rotation, so ist diese Achse eine Hauptträgheitsachse. Die beiden anderen liegen dann in der Ebene senkrecht dazu und sind gleich.