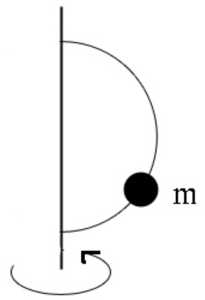
Ferienkurs Theoretische Mechanik, SS 2008

1 Lösungen für Dienstag

1.1 Rotierender Draht

Ein Massenpunkt sei auf einem halbkreisförmigen masselosen rotierenden Draht reibungsfrei befestigt. Der Draht drehe um die Achse mit konstantem ω. Das ganze befinde sich im kräftefreien Raum (keine Gravitation!!)



(a) Was sind die dynamischen Variablem? Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab.

(b) Betrachten Sie kleine Schwingungen um $\theta = \pi/2 + \Psi$. Linearisieren Sie die entstehenden DGL für kleine Winkel Ψ und lösen Sie sie.

(c) Ist die Energie erhalten? Grund?

Lösung

(a)Da der Draht mit konstantem ω rotiert der Radius R fest ist, ist nur θ eine dynamische Variable. Somit lautet die Lagrangefunktion:

$$L = \frac{m}{2}R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 sin^2(\theta)) = \frac{m}{2}R^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 sin^2\theta)$$

und:

$$\ddot{\theta} - \omega^2 sin\theta cos\theta = 0$$

(b)Es gilt:

$$0 = \ddot{\Psi} - \omega^2 sin(\frac{\pi}{2} + \Psi)cos(\frac{\pi}{2} + \Psi) = \ddot{\Psi} + \omega^2 cos(\Psi)sin(\Psi) \approx \ddot{\Psi} + \omega^2\Psi$$

Eine mögliche Darstellung der Lösung ist dann:

$$\Psi(t) = \Psi_0 cos(\omega t + \delta)$$

(c)Einsetzen ergibt:

$$\frac{dE}{dt} = 2m\omega^2 R^2 \dot{\theta} sin\theta cos\theta \neq 0 \qquad (1)$$

Zwangskraft und Geschwindigkeit sind nicht sekrecht. Dadurch kann Energie zugeführt werden.

1.2 Widerholung zu Eigenwerten und Eigenvektoren

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung

Das Eigenwertproblem lautet:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \qquad \rightarrow \qquad (A - \lambda 1)\vec{x} = 0$$

Da nichttriviale Lösungen gesucht werden muss $\vec{x} \neq 0$ sein. Dafür muss die Determinante verschwinden:

$$det(A - \lambda 1) = det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda^2) = 0$$

Damit sind die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ (einfach) und $\lambda_2 = 1$ (zweifach)
Für die normierten Eigenvektoren ergibt sich:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da die Matrix schon Blockform hat, hätte man auch gleich die Blöcke einzeln Lösen können.

1.3 Drei gekoppelte Massen

Drei identische Massen m sind durch drei identische Federn mit Federkonstante k miteinander verbunden. Hierbei gleiten die Massen entlang einer festen Kreislinie mit Radius R.

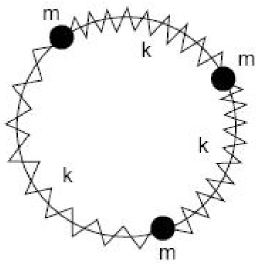
(a) Setzen Sie eine Lagrangefunktion für dieses System auf und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für Schwingungen um die Gleichgewichtspositionen.

(b) Zeigen Sie, dass die Eigenfrequenzen durch

$$\omega_1^2 = 0 \qquad\qquad \omega_2^2 = \omega_3^2 = \frac{3k}{m}$$

gegeben sind und bestimmen Sie die dazugehörigen Normalmoden

Lösung



Wir benutzen als Koordinaten die Abweichung aus der Ruhelage

$$s_i = R\phi_i \ \ i = 1, 2, 3$$

Damit bekommt man die Energien

$$T = \frac{m}{2}(\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2 + \dot{s}_3^2)$$

$$V = \frac{k}{2}[(s_2 - s_1)^2 + (s_3 - s_2)^2 + (s_1 - s_3)^2]$$

und damit die Lagrangefunktion:

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2 + \dot{s}_3^2) - \frac{k}{2}[(s_2 - s_1)^2 + (s_3 - s_2)^2 + (s_1 - s_3)^2]$$

Dies lässt sich in Matrixschreibweise schreiben als:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{s}}\hat{M}\dot{\mathbf{s}} - \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\hat{K}\mathbf{s}$$

mit Matrizen

$$\hat{M} = m\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad K = km\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$\hat{M}\ddot{\mathbf{s}} + \hat{k}\mathbf{s} = 0 \tag{3}$$

Der Ansatz $\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}_0 e^{i\omega t}$ führt zu dem Eigenwertproblem:

$$\hat{\Lambda}\mathbf{s_0} = \lambda\mathbf{s_0} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \lambda = \frac{m\omega^2}{k}$$

Die Matrix hat die Eigenwerte und Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 0; \rightarrow \ \ \mathbf{s_1} = (1, 1, 1)^T \ \ \rightarrow \ \ \omega_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 3; \rightarrow \ \ \mathbf{s_2} = (1, -1, 0)^T \ \ \rightarrow \ \ \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$\lambda_3 = 3 = \lambda_2; \rightarrow \ \ \mathbf{s_3} = \mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2} = (-1, -1, 2)^T \ \ \rightarrow \ \ \omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

1.4 Schwingung des CO_2 - Moleküls

Ein idealisiertes CO_2 - Molekül bestehe aus einer linearen Anordnung aus drei Massenpunkten mit $m_1 = m_3 = M$ und $m_2 = m$.
Die Massenpunkte seien durch Federn der Federkonstante k verbunden. Betrachten Sie kleine Auslenkungen x_i aus den Ruhelagen entlang der x-Achse.

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen

(b) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenmoden

(c) Erklären Sie die Moden anschaulich

Lösung

(a)Mit den Auslenkungen x_i aus den Ruhelagen ergibt sich:

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{M}{2}\dot{x}_3^2$$

$$U = \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2)^2$$

$$\rightarrow \qquad L = \frac{M}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{k}{2}\left((x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2\right)$$

Für die Bewegungsgleichungen folgt:

$$M\ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1) = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) - k(x_3 - x_2) = 0$$

$$M\ddot{x}_3 - k(x_3 - x_2) = 0$$

(b)Mit dem Ansatz $\vec{x} = \vec{A}e^{i\omega t}$ folgt in Matrix schreibweise:

$$\begin{pmatrix} -M\omega^2 + k & -k & 0 \\ -k & -m\omega^2 + 2k & -k \\ 0 & -k & -M\omega^2 + k \end{pmatrix} \vec{A} = 0$$

Damit folgen die Eigenwerte:

$$\omega_1^2 = 0 \qquad \omega_2^2 \frac{k}{M} \qquad \omega_3^2 = \frac{k(m + 2M)}{mM}$$

Damit erbegen sich folgende Eigenvektoren:

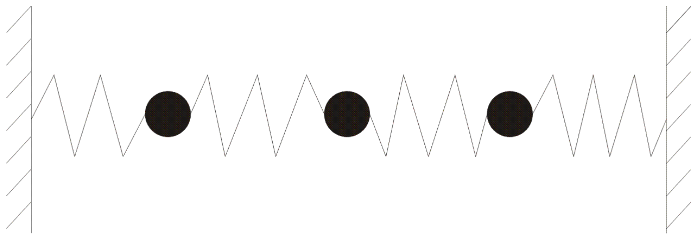
$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2M/m \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beachten Sie dass die Lösung für $\omega = 0$ anders aussieht als für $\omega \neq 0$. Damit folgt:

$$\vec{x}(t) = (a_1 + a_2 t)\vec{A}_1 + (b_1 e^{i\omega_2 t} + b_2 e^{-i\omega_2 t})\vec{A}_2 + (c_1 e^{i\omega_3 t} + c_2 e^{-i\omega_3 r})\vec{A}_3$$

1.5 Drei Massen, fester Rand

Drei gleiche Massen m sind durch Federn der Federkonstante k wie folgt verbunden:



Berechnen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen des Systems.

Lösung

Die potentielle Energie lautet:

$$V = \frac{k}{2}[x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + x_3^2]$$

Damit folgt analog zu Aufgabe 1:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und damit:

$$\lambda_1 = 2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{s_1} = (1, 0, 1)^T \quad \rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

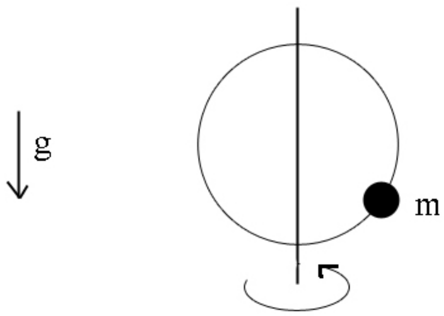
$$\lambda_2 = 2 + \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{s_2} = (1, -\sqrt{2}, 1)^T \quad \rightarrow \quad \omega 2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\lambda_3 = 2 - \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{s_3} = (1, \sqrt{2}, 1)^T \quad \rightarrow \quad \omega 3 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

1.6 Spontane Symmetriebrechung

Bei einer spontanen Symmetriebrechung besitzt der Lagrange eine bestimmte Symmetrie, der Grundzustand jedoch nicht.

Betrachten Sie einen masselosen Ring der im Schwerefeld der Erde mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert und auf dem eine Masse m reibungsfrei gleiten kann.



(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion $L(\theta, \dot{\theta})$ auf und zeigen sie dass Sie unter der Transformation $\theta \rightarrow -\theta$ invariant ist.

(b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage θ und zeigen Sie dass diese für Werte $\omega^2 > \frac{g}{R}$ von 0 verschieden ist.

(c) Wann handelt es Sich also um eine spontane Symmetriebrechung ?

Lösung

(a)Die z- Achse zeigt nach unten und der 0 Punkt ist in der Mitte des Kreises. Damit sind die Energien:

$$T = \frac{m}{2}(R^2\dot{\theta}^2 + \omega^2 R^2 \sin^2\theta)$$

und

$$V = -mgR\cos\theta$$

Damit ergibt sich:

$$L = T - V = \frac{m}{2}(R^2\dot{\theta}^2 + \omega^2 R^2 \sin^2\theta) + mgR\cos\theta$$

(b) Für die Gleichgewichtslage gilt:

$$\partial_\theta L = m\omega^2 R^2 sin(cos\theta - \frac{g}{\omega^2 R}) = 0$$

Dies ist erfüllt für:

Fall a $\omega^2 \prec \frac{g}{R}$:

$$cos\theta - \frac{g}{\omega^2 R} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \theta_0 = 0$$

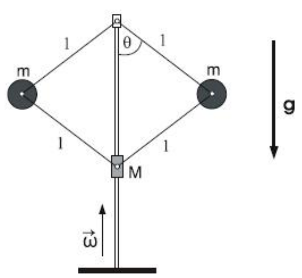
Fall b $\omega^2 \succ \frac{g}{R}$

$$\theta_0 = \pm cos^{-1}\frac{g}{\omega^2 R}$$

(c) Bei Fall b

1.7 Fliehkraftregler

Zwei Massen m sind mit vier masselosen, schwenkbaren Armen der Länge l an einer senkrechten Stange befestigt. Der obere Aufhängepunkt ist an der Stange fixiert. Am unteren befindet sich eine Masse M, die reibungsfrei aufwärts und abwärts gleiten kann, wenn sich die Massen m von der Stange weg, oder auf sie zu bewegen. Die Anordnung rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die senkrechte Stange und auf die Massen wirkt die Erdanziehungskraft.



(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion $L(\theta, \dot{\theta})$ auf.
Hinweis: Die kinetische Energie hat drei Anteile: einen von der Masse M, einen aus der Rotation der Massen m und einen proportional zu $m\dot{\theta}^2$

(b) Bestimmen Sie die zugehörigen Bewegungsgleichungen

(c) Bestimmen Sie die Höhe z der Masse M als Funktion von ω für eine gleichbleibende Drehung des Systems, d.h. ohne senkrechte Bewegung. Geben Sie diese Höhe gegenüber der niedrigsten Position von M an.

Lösung

(a) Mit der generalisierten Koordinate θ folgt für die Koordinate der Masse M :

$$z = -2l\cos\theta \quad \rightarrow \quad \dot{z} = 2l\dot{\theta}\sin\dot{\theta}$$

Damit folgt:

$$L = T - V = m(l^2\omega^2\sin^2\theta + l^2\dot{\theta}^2) + 2Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + 2(M + mgl\cos\theta)$$

(b) Mit $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial\theta}$ folgen die Bewegungsgleichungen zu:

$$(m + 2M\sin^2\theta)\ddot{\theta} + 2Ml\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta - ml\omega^2\sin\theta\cos\theta + (M+m)g\sin\theta = 0$$

(c) Im stabilen Zustand gilt $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$. Damit folgt:

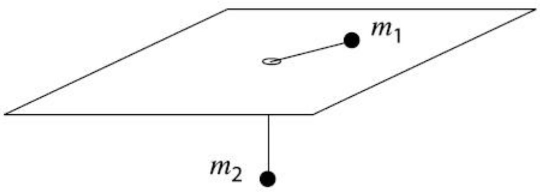
$$ml\omega^2\cos\theta = (M+m)g$$

Da $\cos\theta \prec 1$ folgt für die minimale Winkelgeschwindigkeit einer stabilen Rotation:

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{M+m}{m}\frac{g}{l}}$$

1.8 System mit Erhaltungsgrößen

Zwei Massen m_1 und m_2 seien durch einen Faden der Länge l verbunden, der durch ein Loch in der Tischplatte geführt ist. Die Masse m_1 bewegt sich reibungsfrei auf der Tischplatte, m_2 kann nur vertikale Bewegungen ausführen. Es gelte die Gravitation.



(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf mit den Koordinaten ϕ und x der Länge des Fadens über dem Tisch.

(b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab

(c) Welche Erhaltungsgrößen gibt es?

(d) Vereinfachen sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Erhaltungsgrößen

(e) Unter welcher Beziehung von L_z und x gibt es stabile Kreisbahnen?

(f) Betrachten Sie kleine Auslengungen $a = x - x_0$ aus der stabilen Kreisbahn x_0 und lösen Sie die Bewegungsgleichung.

Lösung

(a) In diesen Koordinaten gilt:

$$T = \frac{m_2}{2}\left(\frac{d(l-x)}{dt}\right)^2 + \frac{m_1}{2}(\dot{x}^2 + x^2\dot{\phi}^2)$$

$$U = -m_2 g(l-x)$$

$$L = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{x}^2\dot{\phi}^2 - m_2 g x$$

(b) Die Bewegungsgleichugen lauten:

$$m_1 x^2\dot{\phi} = const$$

$$(m_1+m_2)\ddot{x} - m_1 x\dot{\phi}^2 + m_2 g = 0$$

(c) Man erkennt sofort aus der ersten BWGL der Aufgabe (b) dass p_ϕ eine Erhaltungsgröße ist da ϕ zyklisch ist:

$$p_\phi = m_1 x^2\dot{\phi} = L_z$$

Ausserdem ist die Gesamtenergie eine Erhaltungsgröße:

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \frac{d(T+U)}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{m_1+m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_1}{2}x^2\phi^2 - m_2\dot{f}(l-x)\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{m_1+m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{L_z^2}{2m_1x^2}x^2\phi^2 - m_2\dot{f}(l-x)\right] \\
&= (m_1+m_2)\dot{x}\ddot{x} - \frac{L_z^2}{m_1x^3}\dot{x} + m_2 g\dot{x} \\
&= \dot{x}\left[(m_1+m_2)\ddot{x} - \frac{L_z^2}{m_1x^3} + m_2 g\right] = 0
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die zweite BWGL eingesetzt wurde.

(d) Wie gerade gezeigt:

$$L_z = const$$

$$(m_1+m_2)\ddot{x} - \frac{L_z^2}{m_1x^3} + m_2 g = 0$$

(e) Durch einsetzen von $\ddot{x} = \dot{x} = 0$ in die BWGL ergibt sich:

$$L_z^2 = m_1 m_2 g x_0^3$$

(f) Entwickle den zweiten Term der BWGL um x_0. Miut $a = x - x_0$ ergibt sich:

$$-\frac{L_z^2}{m_1x^3} \approx -\frac{L_z^2}{m_1x_0^3} + \frac{3L_z^2}{m_1x_0^4}a$$

Setzt man die Bedingung für die stabile Kreisbahn ein folgt:

$$= -m_2 g + \frac{3L_z^2}{m_1x_0^4}a = -m_2 g + \lambda a$$

Eingesetzt in die BWGL folgt:

$$(m_1+m_2)\ddot{a} + \lambda a = 0$$

Die Lösung dieser DGL ist nach diesem Blatt trivial.