1 Erzwungene Schwingungen

1.1 Bewegungsgleichung

Betrachte ein System mit einem Freiheitsgrad mit einer schwachen Störung:

$$L(q,\dot{q},t) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - U(q) - U_{ext}(q,t) \tag{1}$$

Dabei ist U_{ext} ist schwache Störung, z.B. ein äußeres elektromagnetisches Feld für ein Atom oder äußerer Antrieb für Schwingkörper.
Das ungestörte System ($U_{ext} = 0$) besitze stabile Gleichgewichtslage bei $q = q_0$. Taylorentwicklung um $q = q_0$:

$$U(q) = U(q_0) + (\partial_q U)_{q_0}(q - q_0) + \frac{1}{2}(\partial^2_{qq} U)_{q_0}(q - q_0)^2 + ... = const + \frac{k}{2}x^2 \tag{2}$$

Dabei ist $x = q - q_0$ die Auslenkung aus der Ruhelage. Es gilt: $(\partial_q U)_{q_0} = 0$ da es sich um eine Gleichgewichtslage handelt, sowie $(\partial^2_{qq} U)_{q_0} > 0$ da diese stabil ist. Eine Taylorentwicklung der Störung um q_0 ergibt:

$$U_{ext}(q,t) = U_{ext}(q_0,t) + (\partial_q U_{ext})_{q_0}(q - q_0) + ... = U_{ext}(q_0,t) - f(t)x + ... \tag{3}$$

Damit ergibt sich die Lagrangefunktion:

$$L(x,\dot{x},t) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 - f(t)x \tag{4}$$

Der Term $U_{ext}(q_0,t)$ wurde weggelassen weil er nur von der Zeit abhängt. Dies ist die Lagrangefunktion des harmonischen Oszillators mit äußerer Kraft $f(t)$ Mit Euler Lagrane folgt die Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = -kx + f$. Mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$lässt sich dies schreiben als:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m} \tag{5}$$

Lässt man auch noch eine Reibungskraft zu ergibt sich:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m} \tag{6}$$

1.2 Lösung der homogenen Gleichung

Für die allgemeine Lösung $\chi(t)$solcher Gleichungugen gilt:

$$x(t) = x_{hom}(t) + x_{part}(t) \tag{7}$$

Für die homogene Gleichung $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ machen wir den Ansatz:

$$x_{hom}(t) = Ce^{-i\nu t} \tag{8}$$

Dieser führt auf die Gleichung $-\nu^2 - 2i\lambda\nu + \omega_0^2 = 0$ die folgende zwei Lösungen besitzt:

$$\nu_{1,2} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} - i\lambda = \pm w_0 - i\lambda \tag{9}$$

Hier müssen wir eine Fallunterscheidung machen:
1.Fall $\omega_0 > \lambda$:
w_0 reell $\rightarrow x_{hom}(t) = Ae^{-\lambda t + w_0 t} + Be^{-\lambda t - w_0 t} = e^{-\lambda t}[A' \sin(w_0 t) + B' \cos(w_0 t)]$
Dies ist eine gedämpfte, periodische Bewegung. Diese kann auch mit einer Amplitude und einer Phase geschrieben werden:

$$x_{hom}(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(w_0 t + \alpha) \tag{10}$$

2.Fall $\omega < \lambda$:
Es ergeben sich: $x_{hom}(t) = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t}$ mit $\lambda_{1,2} = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$
3. Fall $\omega_0 = \lambda$:
Dieser Fall ist der aperiodische Grenzfall. Die beiden Lösungen sind entartet. Damit lautet die Lösung:

$$x_{hom}(t) = (A + Bt)e^{-\lambda t} \tag{11}$$

1.3 partikuläre Lösung

Da man jede beliebige externe Kraft mittels Fouriertransformation in periodische Bestandteile zerlegen kann, reicht es hier externe Kräfte der Form $f(t) = f_\omega \cos \omega t$ zu betrachten.
Noch einfacher betrachten wir die Gleichung

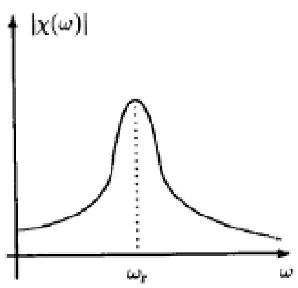
$$\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{f_\omega}{m} exp(i\omega t) \tag{12}$$

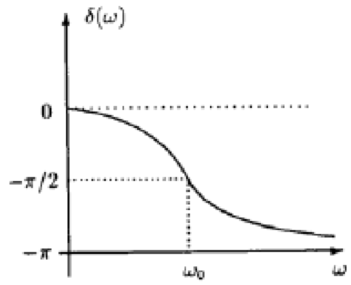
und nehmen am Ende den Realteil der Lösung.
Der Ansatz $y_{part}(t) = \frac{f_\omega}{m}\chi(\omega)exp(i\omega t)$ ergibt:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega} \tag{13}$$

Dies ist die dynamische Suszeptibilität. Zerlegt in Amplitude und Phase $\chi = |\chi| exp(i\delta)$ ergibt sich:

$$|\chi(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} \qquad \tan\delta(\omega) = \frac{2\lambda\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \tag{14}$$





2 Systeme gekoppelter Schwinger

2.1 anschauliche Betrachtung mit Newton

Betrachte eine lineare Kette aus 3 Atomen der Masse m die mit gleichen Federn der Federkonstanten k verbunden sind. Die Federn sind bei der Länge b entspannt. Mit Newton lassen sich die Bewegungsgleichungen schreiben als:

$$m\ddot{q}_1 = k(q_2 - q_1 - b) \tag{15}$$

$$m\ddot{q}_2 = k(q_3 - q_2 - b) - k(q_2 - q_1 - b) \tag{16}$$

$$m\ddot{q}_3 = k(q_3 - q_2 - b) \tag{17}$$

Mit den Koordinaten $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ die die Auslenkung aus der Ruhelage beschreiben und der Matrixschreibweise ergibt dies:

$$m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ddot{\vec{x}} + k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = 0 \tag{18}$$

2.2 Betrachtungen mit Lagrange

Analog zur Betrachtung bei 1 Schwingenden Teilchen lässt sich die Energie im Vielteilchenproblem um die Ruhelage entwickeln:

$$U(x) \approx \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \qquad mit \qquad F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \partial_\beta U \tag{19}$$

Dabei ist $F_{\alpha\beta}$ die positiv definite Kraftkonstantenmatrix.
Damit lässt sich die Lagrangefunktion schreiben als:

$$L = \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \tag{20}$$

Dies liefert mit der Matrixschreibweise $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ die Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{\vec{x}} + \Lambda \vec{x} = 0 \qquad mit \qquad \Lambda = M^{-1} F \tag{21}$$

Der Ansatz $\vec{x} = \vec{u} e^{i\omega t}$ führt zu dem Eigenwertproblem:

$$\Lambda \vec{x} = \omega^2 x \tag{22}$$

Für das Problem der 3 mit Federn gekoppelten Massen mit Auslenkungen x aus der Ruhelage ergibt sich mit $V(x_1, x_2, x_3) = \frac{k}{2}[(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2]$:

$$\frac{k}{m} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \omega^2 \vec{x} \tag{23}$$

Dies ist identisch mit der Herleitung nach Newtonschen Überlegungen.
Das Eigenwertproblem liefert über $det(\Lambda - \omega^2 1) = 0$:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \qquad \omega_3 = 0 \tag{24}$$

und

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

3 Noether Theorem

3.1 Erhaltungsgrößen

Eine Gröe $A(q, \dot{q}, t)$ heißt Erhaltungsgröße wenn längs der Bahnbewegung q(t) gilt:

$$\frac{d}{dt} A(q(t), \dot{q}(t), t) = 0 \tag{26}$$

3.2 Zyklische Koordinaten

Der zu q_k kanonisch konjugierter Impuls ist definiert durch:

$$p_k = \partial_{\dot{q}_k} L \tag{27}$$

Eine Koordinate q_k heißt zyklisch wenn gilt:

$$\partial_{q_k} L = 0 \tag{28}$$

Es gilt:

$$q_k \text{ zyklisch} \rightarrow \ p_k \text{ erhalten}$$

da

$$q_k \text{ zyklisch} \rightarrow \ \tfrac{d}{dt} \partial_{\dot{q}_k} L = \partial_{q_k} L = 0 \ \rightarrow \ \tfrac{dp_k}{dt} = 0$$

3.3 Noether Theorem

Das Noether Theorem besagt:

> Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie gehört eine Erhaltungsgröße und umgekehrt.
>
> Dabei bedeutet Symmetrie eine Transformation die die Wirkung S invariant lässt.

Betrachte Transformation:

$$q \rightarrow q_k^* = q_k + \epsilon \Psi_k(q,t) + \Theta(\epsilon^2) \tag{29}$$

$$t \rightarrow t^* = t + \epsilon \Phi(q,t) + \Theta(\epsilon^2) \tag{30}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q, \frac{dq}{dt}, t) \\ S^* &= \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt^* L(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*) = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{dt^*}{dt}\ L(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dt^*}{dt} L^* \end{aligned}$$

S invariant unter Transformation bedeutet:$S = S^*$. Mit:

$\frac{dq_k^*}{dt^*} = \frac{dq_k^*}{dt}\frac{dt}{dt^*} = \frac{dq_k^*}{dt}\frac{1}{1+\epsilon\frac{d\Phi}{dt}} \approx \frac{da_k^*}{dt}(1-\epsilon\frac{d\Phi}{dt}) = (\frac{dq_k}{dt}+\epsilon\frac{d\Psi}{dt})(1-\epsilon\frac{d\Phi}{dt}) = \dot{q}_k+\epsilon\frac{d\Psi}{dt}-\epsilon\dot{q}_k\frac{d\Phi}{dt}+\Theta(\epsilon^2)$

folgt:

$$L^{*=}L(q + \epsilon\Psi, \dot{q} + \epsilon\frac{d\Psi}{dt} - \epsilon\frac{d\Psi}{dt}, t + \epsilon\Psi) \tag{31}$$

Benutze im Integral die Taylorentwicklung um $\epsilon = 0$

$$L^* \frac{dt^*}{dt} \approx L^* \frac{dt^*}{dt}|_{\epsilon=0} + \frac{d}{d\epsilon}(L^* \frac{dt^*}{dt})|_{\epsilon=0}\epsilon \tag{32}$$

Mit $\frac{dt^*}{dt} = 1 + \epsilon\frac{d\Phi}{dt}$ergibt dies:

$$L^* \frac{dt^*}{dt} \approx L + \frac{d}{d\epsilon}(L^* \frac{dt^*}{dt})|_{\epsilon=0}\epsilon \tag{33}$$

Damit folgt aus $S = S^*$dass $L = L + +\frac{d}{d\epsilon}(L^* \frac{dt^*}{dt})|_{\epsilon=0}\epsilon$. Desshalb muss gelten:

$$\begin{aligned} +\frac{d}{d\epsilon}(L^* \frac{dt^*}{dt})|_{\epsilon=0} &= 0 && (34) \\ &= \frac{dL^*}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}\frac{dt^*}{dt}|_{\epsilon=0} + L^*|_{\epsilon=0}\frac{d}{d\epsilon}(1+\epsilon\frac{d\Phi}{dt})|_{\epsilon=0} && (35) \\ &= \frac{dL^*}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} + L\frac{d\Phi}{dt} && (36) \\ &= (\nabla_q L)\Psi + (\nabla_{\dot{q}} L)(\dot{\Psi}_k - \dot{q}\dot{\Phi}) + \dot{L}\Phi + L\dot{\Phi} && (37) \end{aligned}$$

Setzte für den ersten Term die Euler-Lagrange Gleichung ein$(\nabla_q L) = \frac{d}{dt}\nabla_{\dot q}L$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot q}L)\Psi - \dot q(\nabla_{\dot q}L)\dot\Phi + \dot L\Phi + L\dot\Psi && (38)\\ &= \frac{d}{dt}((\nabla_{\dot q}L)\Psi + (L - \dot q\nabla_{\dot q}L)\Phi) && (39)\end{aligned}$$

Somit ist gezeigt dass

S invariant $\Leftrightarrow$ $\frac{d}{dt}(\sum_k \partial_{\dot q_k}\Psi_k + (L - \sum_k \dot q_k \partial_{\dot q_k} L)\Phi) = 0$

$\Leftrightarrow$ $Q = (\sum_k \partial_{\dot q_k}\Psi_k + (L - \sum_k \dot q_k \partial_{\dot q_k} L)\Phi)$ Erhaltungsgröße

$$Q = (\nabla_{\dot q}L)\Psi + (L - \dot q\nabla_{\dot q}L)\Phi \tag{40}$$

eine Erhaltungsgröße ist.

Damit folgt:

1. Invarianz unter Zeit-Translation $\rightarrow$ Energieerhaltung
2. Invarianz unter Raum-Translation $\rightarrow$ Impulserhaltung
3. Invarianz unter Raum-Rotation $\rightarrow$ Drehimpulserhaltung

Beweise:

1. Es gilt:

$$\begin{aligned} t \quad \rightarrow \quad t^* = t + \epsilon \quad &\rightarrow \quad \Phi = 0 && (41)\\ q^* = q \quad &\rightarrow \quad \Psi = 0 && (42)\end{aligned}$$

und damit:

$$Q = L - \dot q\nabla_{\dot q}L = -H \tag{43}$$

2. Es gilt:

$$\begin{aligned} t^* &= t & \rightarrow \quad & \Phi = 0 && (44)\\ x^* &= x + e_i\epsilon & \rightarrow \quad & \psi = e_i && (45)\end{aligned}$$

und damit:

$$Q = \partial_{\dot x_i}L = p_i \tag{46}$$

3. Es gilt: (z.B: in Kugelkoordinaten)

$$\begin{aligned} t^* &= t && (47)\\ x^* &= x + e_\phi && (48)\end{aligned}$$

und damit:

$$Q = \partial_{\dot e_\phi}L \tag{49}$$