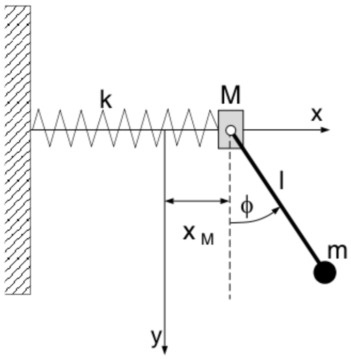
Ahmed Omran


# Ferienkurs Theoretische Mechanik, Sommer 2008

## 1 Lösungen zur Lagrange-Mechanik

### 1.1 Pendel

Eine Masse $M$ ist durch eine masselose Feder mit Federkonstante $k$ mit einer Wand verbunden. $M$ kann sich nur horizontal entlang der $x$-Achse bewegen. Die Koordinate $x_M$ bezeichne die Abweichung der Position von $M$ von der Ruhelage der Feder. An der Masse $M$ sei ein ebenes Fadenpendel angebracht, bestehend aus einer Masse $m$, die mit einem masselosen Stab der Länge $l$ befestigt sei. Die Masse $m$ kann sich nur in der $x$-$y$-Ebene bewegen. Bestimme die Lagrangefunktion und daraus die Bewegungsgleichungen der beiden Massen.




#### Lösung

Die Koordinaten der beiden Massen lauten:
Masse M: $x_1 = x_M$ $y_1 = 0$
Masse m: $x_2 = x_M + l \cdot \sin\phi$ $y_2 = l \cdot \cos\phi$
Die kinetische Energie vom gesamten System lautet:

$$\begin{aligned} T = T_M + T_m &= \frac{M}{2}\dot{x}_M^2 + \frac{m}{2}\left[\left(\dot{x}_M + l\dot{\phi}\cdot\cos\phi\right)^2 + \left(-l\dot{\phi}\cdot\sin\phi\right)^2\right] \\ &= \frac{M}{2}\dot{x}_M^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_M^2 + m\dot{x}_M l\dot{\phi}\cdot\cos\phi + \frac{m}{2}(l\dot{\phi})^2\left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right) \\ &= \frac{M+m}{2}\dot{x}_M^2 + \frac{m}{2}(l\dot{\phi})^2 + m\dot{x}_M l\dot{\phi}\cdot\cos\phi \end{aligned}$$

Die gesamte potentielle Energie beträgt:

$$V = V_M + V_m = \frac{k}{2}x_M^2 - mgy_2 = \frac{k}{2}x_M^2 - mgl\cos\phi$$

Die Lagrangefunktion lautet demnach:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{M+m}{2}\dot{x}_M^2 + \frac{m}{2}(l\dot{\phi})^2 + ml\dot{x}_M\dot{\phi}\cdot\cos\phi - \frac{k}{2}x_M^2 + mgl\cdot\cos\phi$$

- $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_M} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_M} = 0$
  $\frac{d}{dt}\left[(M+m)\,\dot{x}_M + ml\dot{\phi}\cos\phi\right] + kx_M = (M+m)\,\ddot{x}_M + ml\ddot{\phi}\cos\phi - ml\dot{\phi}^2\sin\phi + kx_M = 0$
- $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$
  $\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\phi} + ml\dot{x}_M\cos\phi\right) - (-ml\dot{x}_M\dot{\phi}\sin\phi - mgl\sin\phi) =$
  $= ml^2\ddot{\phi} + ml\ddot{x}_M\cos\phi - ml\dot{x}_M\dot{\phi}\sin\phi + ml\dot{x}_M\dot{\phi}\sin\phi + mgl\sin\phi =$
  $= ml^2\ddot{\phi} + ml\ddot{x}_M\cos\phi + mgl\sin\phi = 0$

Die beiden Bewegungsgleichungen lauten demnach:

$$\underline{(M+m)\,\ddot{x}_M + ml\ddot{\phi}\cos\phi - ml\dot{\phi}^2\sin\phi + kx_M = 0}$$

$$\underline{\ddot{x}_M\cos\phi + l\ddot{\phi} + g\sin\phi = 0}$$

## 1.2 Magnetisches Feld

Ein Teilchen mit Masse $m$ und Ladung $q$ bewegt sich in einem Magnetfeld $\vec{B} = B{\cdot}\vec{e}_z$. Die Lagrangefunktion ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{q}{2}\dot{\vec{r}}\cdot(\vec{r}\times\vec{B})$$

a) Bestimme die Bewegungsgleichungen der kartesischen Koordinaten aus der Lagrangefunktion.
b) Löse die Bewegungsgleichungen für die Anfangsbedingungen $\dot{\vec{r}}(0) = v_0\vec{e}_x$ und $\vec{r}(0) = \frac{mv_0}{qB}\vec{e}_y$

## Lösung

- a) Die Lagrangefunktion kann man in kartesischen Koordinaten folgendermaßen schreiben:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) - \frac{q}{2}\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i(\vec{r}\times\vec{B})_i$$

Mit der Identität $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = -\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$ schreibt man die zweite Summe um:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) + \frac{q}{2}\sum_{i=1}^{3}x_i(\dot{\vec{r}}\times\vec{B})_i$$

Für die kartesischen Koordinaten $x_i$ $(i = 1, 2, 3)$ gilt die Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[m\dot{x}_i - \frac{q}{2}(\vec{r}\times\vec{B})_i\right] - \frac{q}{2}(\dot{\vec{r}}\times\vec{B})_i = 0$$

$$m\ddot{x}_i - q(\dot{\vec{r}}\times\vec{B})_i = 0$$

Oder in Vektorform:

$$\Rightarrow \underline{m\ddot{\vec{r}} = q\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{B}\right)}$$

Dies ist einfach die Newton'sche Gleichung für die Lorentzkraft.

Mit der Bedingung $\vec{B} = B\vec{e}_z$bekommen wir: $\begin{cases} \ddot{x} - \frac{qB}{m}\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + \frac{qB}{m}\dot{x} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$

- b) In der obigen Bewegungsgleichung ersetzen wir $\dot{\vec{r}}$ durch $\vec{v}$, und $\frac{qB}{m}$ durch $\omega$.

$$\begin{cases} \dot{v}_x - \omega v_y = 0 \\ \dot{v}_y + \omega v_x = 0 \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{v}_y = \frac{\ddot{v}_x}{\omega} \\ \ddot{v}_x + \omega^2 v_x = 0 \\ v_z = const. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = a\cos\omega t + b\sin\omega t \\ v_y = -a\sin\omega t + b\cos\omega t \\ v_z = v_z(0) \end{cases}$$

$a$ und $b$ sind Integrationskonstanten. Mit der Anfangsbedingung $v(0) = v_0\vec{e}_x$ gilt dann:

$$\begin{cases} v_x(0) = a = v_0 \\ v_y(0) = b = 0 \\ v_z(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0\cos\omega t \\ v_y = -v_0\sin\omega t \\ v_z = 0 \end{cases}$$

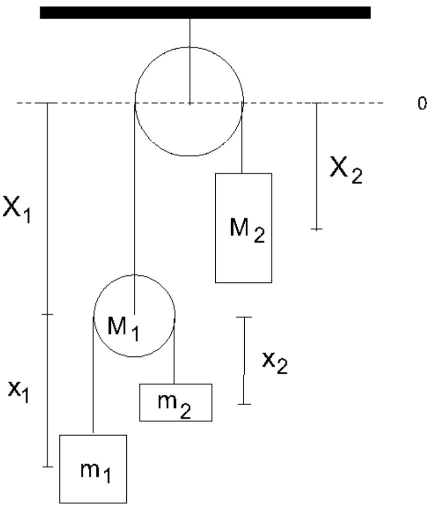
Integriert man diese drei Gleichungen mit der Anfangsbedingung $\vec{r}(0) = \frac{v_0}{\omega}\vec{e}_y$ folgt für die kartesischen Koordinaten:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + x(0) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega}\cos\omega t + C = \frac{v_0}{\omega}\cos\omega t \\ z(t) = z(0) = 0 \end{cases}$$

Dies entspricht einer geschlossenen Kreisbahn um die z-Achse herum.

## 1.3 Atwood'sche Fallmaschine

Eine Masse $M_2$ ist am Ende eines Fadens befestigt, der über eine masselose Rolle hängt. Am anderen Ende ist eine andere Rolle mit Masse $M_1 = 0$, über die zwei Massenstücke $m_1$ und $m_2$ hängen (s. Abbildung). Beide Fäden sind masselos, Reibung ist zu vernachlässigen.




a) Stelle die Lagrangegleichung des Systems auf.
b) Bestimme die Bewegungsgleichungen und die Beschleunigung jeder Masse.

## Lösung

- a) Wir führen zur Vereinfachung zwei neue Koordinaten ein:

$$y_1 = X_1 + x_1 \quad \text{(Höhe der Masse } m_1 \text{bezogen auf den Nullpunkt)}$$

$$y_2 = X_1 + x_2 \quad \text{(Höhe von } m_2\text{)}$$

Zwangsbedingungen: $X_1 + X_2 = l_1 \qquad x_1 + x_2 = l_2$
Einführung von generalisierten Koordinaten

$$\begin{aligned} (i) X_2 &= x \\ (ii) X_1 &= l_1 - X_2 = l_1 - x \\ (iii) x_2 &= y \\ (iv) x_1 &= l_2 - y \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeiten der Massen lauten:

$$\begin{aligned} v(M_2) &= \dot{x} \\ v(M_1) &= -\dot{x} \\ v(m_1) &= -(\dot{x} + \dot{y}) \\ v(m_2) &= -\dot{x} + \dot{y} \end{aligned}$$

Daraus folgt die kinetische Energie des Systems (mit $M_1 = 0$):

$$T = \frac{M_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y} + \dot{x}^2\right)$$

Und für die potentielle Energie:

$$V = -M_2 g x - m_2 g(l_1 - x + y) - m_1 g(l_1 - x + l_2 - y)$$

Daher lautet die Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L} = \frac{M_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y} + \dot{x}^2\right) + M_2 g x + m_2 g(l_1 - x + y) + m_1 g(l_1 - x + l_2 - y)$$

- b) Beschleunigung von $x$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = M_2\ddot{x} + m_1(\ddot{x} + \ddot{y}) + m_2(\ddot{x} - \ddot{y}) - M_2 g + m_1 g + m_2 g = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\ddot{x} = \frac{g(M_2 - m_1 - m_2) + \ddot{y}(m_2 - m_1)}{M_2 + m_1 + m_2}}$$

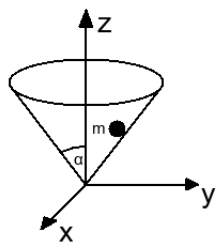
Beschleunigung von $y$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = m_1(\ddot{x} + \ddot{y}) + m_2(\ddot{y} - \ddot{x}) - g(m_2 - m_1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\ddot{y} = \frac{g(m_2 - m_1) + \ddot{x}(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}}$$

## 1.4 Teilchen in einem Kegel

Eine Kugel mit Masse $m$ rollt in einem Kreiskegel mit Öffnungswinkel $\alpha$. (Abbildung unten). Bestimme die Zwangsbedingung und Bewegungsgleichungen mithilfe der Lagrangegleichungen 1. Art in Zylinderkoordinaten. Gehe dabei vor wie im Beispiel aus der Vorlesung, und finde den Betrag der Zwangskraft.




## Lösung

Die Masse kann sich nur entlang der geneigten Fläche bewegen. Mit $\frac{r}{z} = \tan\alpha$ können wir die einzige Zwangsbedingung aufstellen:

$$A(z, r, \phi) = r - z\tan\alpha = 0$$

Dies ergibt:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\tan\alpha \qquad \frac{\partial f}{\partial r} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0$$

Die Lagrangefunktion lautet in den noch abhängigen Zylinderkoordinaten:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \dot{z}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - mgz$$

Die allgemeine Lagrangegleichung 1. Art für eine Zwangsbedingung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \lambda \frac{\partial f}{\partial q} = Z_q$$

Daraus folgt für die drei Koordinaten die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} z: &\quad m(\ddot{z} + g) = -\lambda \tan\alpha = Z_z \\ r: &\quad m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = \lambda = Z_r \\ \phi: &\quad mr^2\ddot{\phi} + 2mr\dot{r}\dot{\phi} = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt: In $z$- und $r$-Richtung übt der Kegel Kräfte auf die Masse aus, aber nicht in $\phi$-Richtung (anschaulich klar). Jetzt wird die Zwangsbedingung eingefügt:

$$\begin{aligned} z: &\quad m(\ddot{r}\cot\alpha + g) = -\lambda \tan\alpha \\ r: &\quad m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = \lambda \\ \phi: &\quad mr(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) = 0 \end{aligned}$$

Die dritte Gleichung ist die erste Bewegungsgleichung. Um den Parameter $\lambda$ zu eliminieren, wird die zweite Gleichung $\tan\alpha$ multipliziert und mit der ersten Gleichung addiert.

$$\Rightarrow \quad (\tan\alpha + \cot\alpha)\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\tan\alpha + g = 0$$

Das ist die zweite Bewegungsgleichung die zur Beschreibung des Systems nötig ist. Mehr unabhängige Bewegungsgleichungen hat man nicht, denn mit einer holonomen Zwangsbedingung gibt es nur noch zwei Freiheitsgrade.

Um den Lagrange-Multiplikator $\lambda$ zu ermitteln, löst man die Lagrangegleichung in der $z$-Koordinaten nach $\ddot{r}$ auf:

$$\ddot{r} = \frac{-\lambda\tan^2\alpha - mg\tan\alpha}{m}$$

und setzt $\ddot{r}$ in die Lagrangegleichung für $r$ ein

$$\Rightarrow \quad -\lambda\tan^2\alpha - mg\tan\alpha - mr\dot{\phi}^2 = \lambda$$

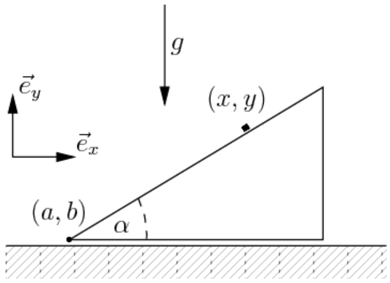
$$\Leftrightarrow \quad \underline{\lambda = -m\frac{g\tan\alpha + r\dot{\phi}^2}{1 + \tan^2\alpha}}$$

Damit können wir den Betrag der Zwangskraft bestimmen:

$$\begin{aligned} \left|\vec{Z}\right| &= \sqrt{Z_z^2 + Z_r^2} = \sqrt{\lambda^2(1+\tan^2\alpha)} = |\lambda|\sqrt{1+\tan^2\alpha} \\ &= m\frac{g\tan\alpha + r\dot{\phi}^2}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = m\frac{g\tan\alpha + r\dot{\phi}^2}{\sqrt{\frac{1}{cos^2\alpha}}} = \underline{m\left(g\sin\alpha + r\dot{\phi}^2\cos\alpha\right)} \end{aligned}$$

## 1.5 Masse auf schiefer Ebene (Klausuraufgabe)

Ein Massenpunkt (Masse $m$) gleite reibungsfrei unter dem Einfluss der konstanten Schwerkraft $g$ auf einer schiefen Ebene (Masse $M$, Neigungswinkel $\alpha$), die selbst entlang der Horizontalen reibungsfrei gleiten kann.




Stelle die Zwangsbedingungen auf, sowie die Lagrangefunktion in unabhängigen generalisierten Koordinaten, und bestimme die Beschleunigung der schiefen Ebene in x-Richtung.

## Lösung

Wir haben folgende Zwangsbedingungen:

$$
\begin{aligned}
&(i) b = 0 \\
&(ii) \tan\alpha = \frac{y-b}{x-a} \quad \Leftrightarrow \quad y - b = (x-a)\tan\alpha
\end{aligned}
$$

Sie sind holonom skleronom, und die Gewichtskraft konservativ $\Rightarrow$ Lösung über Lagrangegleichung 2. Art.
Geeignete generalisierten Koordinaten:

$$q_1 = a \qquad q_2 = l = \frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha}$$

$l$ ist somit die Länge entlang der schiefen Ebene.
Mit $x = l\cos\alpha + a$ und $y = l\sin\alpha$ gilt:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{M}{2}\dot{a}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \\
&= \frac{M}{2}\dot{a}^2 + \frac{m}{2}\left((\dot{l}\cos\alpha)^2 + 2\dot{l}\dot{a}\cos\alpha + \dot{a}^2 + (\dot{l}\sin\alpha)^2\right) \\
&= \underline{\frac{M+m}{2}\dot{a}^2 + \frac{m}{2}\dot{l}^2 + m\dot{l}\dot{a}\cos\alpha}
\end{aligned}
$$

$$V = mgy = \underline{mgl\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathcal{L} = \frac{M+m}{2}\dot{a}^2 + \frac{m}{2}\dot{l}^2 + m\dot{l}\dot{a}\cos\alpha - mgl\sin\alpha}$$

Für beide Koordinaten werden die Lagrangegleichungen aufgestellt:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{a}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a} &= (M+m)\ddot{a} + m\ddot{l}\cos\alpha - 0 = 0 \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{l}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial l} &= m\ddot{l} + m\ddot{a}\cos\alpha + mg\sin\alpha = 0
\end{aligned}
$$

Die erste Gleichung lösen wir nach $m\ddot{l}$ auf, und setzen sie in die zweite Gleichung ein.

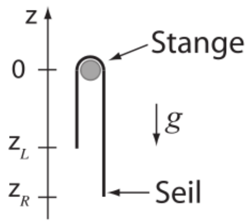
$$m\ddot{a}\cos\alpha + mg\sin\alpha - \frac{(M+m)}{\cos\alpha}\ddot{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{a}\left(m\cos\alpha - \frac{(M+m)}{\cos\alpha}\right) = \ddot{a}\left(\frac{m(\cos^2\alpha - 1) - M}{\cos\alpha}\right) = -mg\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\ddot{a} = \frac{m\sin\alpha\cos\alpha}{m\sin^2\alpha + M}\cdot g}$$

## 1.6 Rutschendes Seil (Klausuraufgabe)

Ein ideal biegsames undehnbares Seil der Länge $l$ hängt im homogenen Schwerefeld der Erde (Erdbeschleunigung $g > 0$) über eine horizontale Stange (siehe Figur). Auf der Stange kann das Seil reibungsfrei gleiten. Die Masse pro Länge des Seiles, $\kappa$, sei konstant über die Länge des Seiles. Der Radius der Stange sei vernachlässigbar. Betrachtet wird nur der Zeitraum, in welchem sich das Seil noch auf der Stange befindet.




a) Verwende als generalisierte Koordinate $q$ die $z$-Position des rechten Seilendes. Zeige, dass sich die Lagrangefunktion des Systems schreiben lässt als

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\kappa l \dot{q}^2 + \frac{1}{2}\kappa g \left((l+q)^2 + q^2\right)$$

b) Zeige, dass sich aus der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} - \omega^2 q = g$$

ergibt. Welcher Ausdruck wurde dabei durch $\omega$ abgekürzt?
c) Zeige, dass die Funktion

$$q(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} - \frac{l}{2}$$

die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung ist. Bestimme die Integrationskonstanten $A$ und $B$ wenn das rechte Seilende zum Zeitpunkt $t = 0$ zur Koordinate $z_{R0} < 0$ reichte und das Seil in Ruhe war. Zeige, dass sich durch Einführung des Ausdrucks $\Delta z_0 = z_{R0} + \frac{l}{2}$ die Lösung ergibt als

$$q(t) = \Delta z_0 \cosh(\omega t) - \frac{l}{2}$$

d) Berechne damit den Zeitpunkt zu welchem das Seil gerade von der Stange gleitet und die Geschwindigkeit des Seiles zu diesem Zeitpunkt. Vereinfache das Resultat mit Hilfe der Beziehung $\sinh(\cosh^{-1}(x)) = \sqrt{x^2-1}$.
e) Leite direkt aus dem Energieerhaltungssatz die Geschwindigkeit des Seils beim Abgleiten ab (dazu ist die Lösung der vorigen Aufgabe nicht notwendig!).

## Lösung

- a) Die zwei relevanten Koordinaten sind $z_R$ und $z_L$. Es gibt nur eine Zwangsbedingung:

$$A(z_R, z_L) = z_R + z_L + l = 0$$

$\Rightarrow \quad z_R = q$ und $z_L = -l - q$
Um die potentielle Energie einer solchen Massenverteilung zu finden, teilen wir das Seil in kleine Massenstücke $\Delta m_i$ auf und machen den Grenzübergang $\Delta m_i \to 0$. Auf der linken Seite:

$$V_L = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i \Delta m_i g h_i = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i \Delta z_i \kappa g z_i = \int_{z_L}^{0} dz \kappa g z = \frac{\kappa g}{2} z^2 \Big|_{z_L}^{0} = -\frac{\kappa g}{2} z_L^2 = -\frac{\kappa g}{2}(l+q)^2$$

Ebenso rechts:

$$V_R = -\frac{\kappa g}{2} z_R^2 = -\frac{\kappa g}{2} q^2$$

$$\Rightarrow \quad V = -\frac{\kappa g}{2}\left(q^2 + (l+q)^2\right)$$

Für die kinetische Energie müssen wir nur wissen dass die gesamte Seilmasse mit der gleichen Geschwindigkeit $\dot{q}$ rutscht:

$$T = \frac{M}{2}\dot{q}^2 = \frac{\kappa l}{2}\dot{q}^2$$

Daraus folgt die Lagrangefunktion:

$$\underline{\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\kappa l \dot{q}^2 + \frac{1}{2}\kappa g\left(q^2 + (l+q)^2\right)}$$

- b)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \kappa l \ddot{q} - \kappa g(2q + l) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \ddot{q} - 2\frac{g}{l}q = g$$

Mit der Definition $\omega = \sqrt{2\frac{g}{l}}$ gilt:

$$\Rightarrow \quad \underline{\ddot{q} - \omega^2 q = g}$$

- c) Gegebener Lösungsansatz:

$$\begin{aligned}
q(t) &= Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} - \frac{l}{2} \\
\dot{q}(t) &= A\omega e^{\omega t} - B\omega e^{-\omega t} \\
\ddot{q}(t) &= A\omega^2 e^{\omega t} + B\omega^2 e^{-\omega t} = \omega^2\left(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}\right)
\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt dies:

$$\omega^2\left(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}\right) - \omega^2\left(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}\right) + \omega^2\frac{l}{2} = \omega^2\frac{l}{2} = \frac{2g}{l}\frac{l}{2} = g$$

$\Rightarrow$ $q(t)$ löst die DGL, es müssen nur für die allgemeine Lösung die Integrationskonstanten $A$ und $B$ bestimmt werden. Mit $\Delta z_0 = z_{R0} + \frac{l}{2}$ folgt:

$$q(0) = A + B - \frac{l}{2} = z_{R0} = \Delta z_0 - \frac{l}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad A + B = \Delta z_0$$

$$\dot{q}(0) = A - B = 0$$

Daraus folgt, dass $A = B = \frac{\Delta z_0}{2}$, und damit für die allgemeine Lösung:

$$q(t) = \frac{\Delta z_0}{2}e^{\omega t} + \frac{\Delta z_0}{2}e^{-\omega t} - \frac{l}{2} = \Delta z_0\left(\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}\right) - \frac{l}{2} = \underline{\Delta z_0 \cosh \omega t - \frac{l}{2}}$$

- d) Am Zeitpunkt $t_E$, wo das Seil die Stange verlässt, ist $q(t_E) = -l$.

$$\Delta z_0 \cosh \omega t - \frac{l}{2} = -l$$
$$\Rightarrow \quad \underline{t_E = \frac{1}{\omega}\cosh^{-1}\left(\frac{-l}{2\Delta z_0}\right)}$$

Zu diesem Zeitpunkt beträgt die Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
\dot{q}(t_E) &= \Delta z_0 \omega \sinh \omega t_E = \Delta z_0 \omega \sinh\left(\cosh^{-1}\frac{-l}{2\Delta z_0}\right) \\
&= \Delta z_0 \omega \sqrt{\frac{l^2}{4\Delta z_0^2} - 1} = \sqrt{\frac{\omega^2 l^2}{4} - \omega^2 \Delta z_0^2} = \underline{\sqrt{\frac{gl}{2} - (\omega \Delta z_0)^2}}
\end{aligned}$$

- e) Wir gehen nun vom Energieerhaltungssatz aus um das letzte Ergebnis zu reproduzieren.

Anfangszustand:

$$V_1 = V_L + V_R = -\frac{\kappa g}{2}\left(z_{R0}^2 + (l + z_{R0})^2\right)$$
$$T_1 = 0$$

Endzustand:

$$V_2 = \int\limits_{-l}^{0} dz \kappa g z = -\frac{\kappa g}{2} l^2$$
$$T_2 = \frac{\kappa l}{2}\dot{z}_R^2$$

Energieerhaltung:

$$\Rightarrow \quad -\frac{\kappa g}{2}\left(z_{R0}^2 + (l + z_{R0})^2\right) = -\frac{\kappa g}{2} l^2 + \frac{\kappa l}{2}\dot{z}_R^2$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad \dot{z}_R &= \sqrt{gl - \frac{g}{l}\left((l + z_{R0})^2 + z_{R0}^2\right)} \\
&= \sqrt{gl - \frac{g}{l}\left(\left(\frac{l}{2} + \Delta z_0\right)^2 + \left(\frac{l}{2} - \Delta z_0\right)^2\right)} \\
&= \sqrt{gl - \frac{g}{l}\left(\frac{l^2}{2} + 2\Delta z_0^2\right)} \\
&= \underline{\sqrt{\frac{gl}{2} - (\omega \Delta z_0)^2}}
\end{aligned}$$