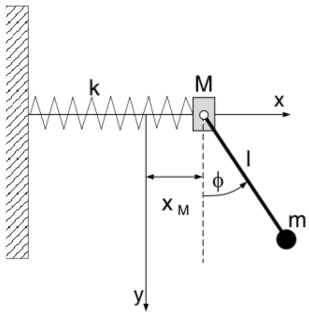
Ahmed Omran

Ferienkurs Theoretische Mechanik, Sommer 2008

1 Aufgaben zur Lagrange-Mechanik

1.1 Pendel

Eine Masse M ist durch eine masselose Feder mit Federkonstante k mit einer Wand verbunden. M kann sich nur horizontal entlang der x-Achse bewegen. Die Koordinate x_M bezeichne die Abweichung der Position von M von der Ruhelage der Feder. An der Masse M sei ein ebenes Fadenpendel angebracht, bestehend aus einer Masse m, die mit einem masselosen Stab der Länge l befestigt sei. Die Masse m kann sich nur in der x-y-Ebene bewegen. Bestimme die Lagrangefunktion und daraus die Bewegungsgleichungen der beiden Massen.



1.2 Magnetisches Feld

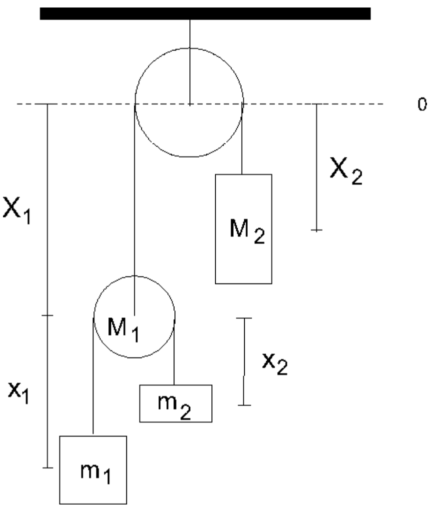
Ein Teilchen mit Masse m und Ladung q bewegt sich in einem Magnetfeld $\vec{B} = B \cdot \vec{e}_z$. Die Lagrangefunktion ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{q}{2}\dot{\vec{r}} \cdot (\vec{r} \times \vec{B})$$

a) Bestimme die Bewegungsgleichungen der kartesischen Koordinaten aus der Lagrangefunktion.
b) Löse die Bewegungsgleichungen für die Anfangsbedingungen $\dot{\vec{r}}(0) = v_0\vec{e}_x$ und $\vec{r}(0) = \frac{mv_0}{qB}\vec{e}_y$ und interpretiere das Ergebnis.

1.3 Atwood'sche Fallmaschine

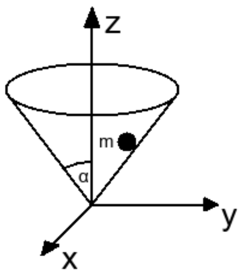
Eine Masse M_2 ist am Ende eines Fadens befestigt, der über eine masselose Rolle hängt. Am anderen Ende ist eine andere Rolle mit Masse $M_1 = 0$, über die zwei Massenstücke m_1 und m_2 hängen (s. Abbildung). Beide Fäden sind masselos, Reibung ist zu vernachlässigen.



a) Stelle die Lagrange-Gleichung des Systems auf.
b) Bestimme die Bewegungsgleichungen und die Beschleunigung jeder Masse.

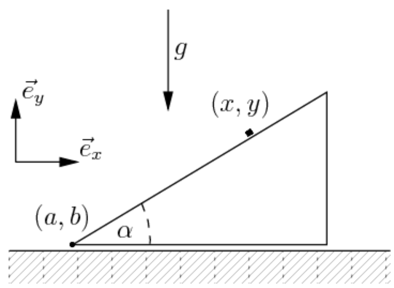
1.4 Teilchen in einem Kegel

Eine Kugel mit Masse m rollt in einem Kreiskegel mit Öffnungswinkel α. (Abbildung unten). Bestimme die Zwangsbedingung ud Bewegungsgleichungen mithilfe der Lagrange-Gleichungen 1. Art in Zylinderkoordinaten. Gehe dabei vor wie im Beispiel aus der Vorlesung, und finde den Betrag der Zwangskraft.



1.5 Masse auf schiefer Ebene (Klausuraufgabe)

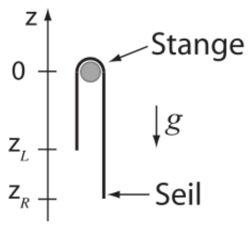
Ein Massenpunkt (Masse m) gleite reibungsfrei unter dem Einfluss der konstanten Schwerkraft g auf einer schiefen Ebene (Masse M, Neigungswinkel α), die selbst entlang der Horizontalen reibungsfrei gleiten kann.



Stelle die Zwangsbedingungen auf, sowie die Lagrangefunktion in unabhängigen generalisierten Koordinaten, und bestimme die Beschleunigung der schiefen Ebene in x-Richtung.

1.6 Rutschendes Seil (Klausuraufgabe)

Ein ideal biegsames undehnbares Seil der Länge l hängt im homogenen Schwerefeld der Erde (Erdbeschleunigung $g > 0$) über eine horizontale Stange (siehe Figur). Auf der Stange kann das Seil reibungsfrei gleiten. Die Masse pro Länge des Seiles, κ, sei konstant über die Länge des Seiles. Der Radius der Stange sei vernachlässigbar. Betrachtet wird nur der Zeitraum, in welchem sich das Seil noch auf der Stange befindet.



a) Verwende als generalisierte Koordinate q die z-Position des rechten Seilendes. Zeige, dass sich die Lagrangefunktion des Systems schreiben lässt als

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\kappa l \dot{q}^2 + \frac{1}{2}\kappa g \left((l+q)^2 + q^2\right)$$

b) Zeige, dass sich aus der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} - \omega^2 q = g$$

ergibt. Welcher Ausdruck wurde dabei durch ω abgekürzt?
c) Zeige, dass die Funktion

$$q(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} - \frac{l}{2}$$

die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung ist. Bestimme die Integrationskonstanten A und B wenn das rechte Seilende zum Zeitpunkt $t = 0$ zur Koordinate $z_{R_0} < 0$ reichte und das Seil in Ruhe war. Zeige, dass sich durch Einführung des Ausdrucks $\Delta z_0 = z_{R_0} + \frac{l}{2}$ die Lösung ergibt als

$$q(t) = \Delta z_0 \cosh(\omega t) - \frac{l}{2}$$

d) Berechne damit den Zeitpunkt zu welchem das Seil gerade von der Stange gleitet und die Geschwindigkeit des Seiles zu diesem Zeitpunkt. Vereinfache das Resultat mit Hilfe der Beziehung $\sinh(Arcosh(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$.
e) Leite direkt aus dem Energieerhaltungssatz die Geschwindigkeit des Seils beim Abgleiten ab (dazu ist die Lösung der vorigen Aufgabe nicht notwendig!).