

# Grundlagen der Lagrange-Mechanik

Ahmed Omran

## 1 Abriss der Newton'schen Mechanik

### 1.1 Newton'sche Axiome

**1. Axiom:** Im Inertialsystem verharrt ein Körper in seinem momentanen Bewegungszustand (in Ruhe, oder geradlinig gleichmäßige Bewegung), solange die Summe aller Kräfte, die auf ihn einwirken gleich Null ist.

**2. Axiom:** Die Impulsänderung eines Körpers ist gegeben durch zur Kraft, die auf diesen einwirkt:  
 $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{r})$

**3. Axiom:** Übt ein Körper A auf einen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große, entgegen gerichtete Kraft von B auf A (reactio), sofern sie von äußeren Einflüssen isoliert sind.

### 1.2 Einteilchensysteme

**Impuls:**  $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ . Mit einer Kraft  $\vec{F} = 0$  bleibt  $\vec{p}$  erhalten. (1. NEWTON'sches Axiom)

**Drehimpuls:**  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ . Mit einem Drehmoment  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$  bleibt  $\vec{L}$  erhalten.

**Energie/Arbeit:** Die an einer Masse verrichtete Arbeit entlang eines Weges  $\gamma$  ist definiert als:

$$W_\gamma = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1)$$

Ist die Kraft konservativ (Keine Wirbel:  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ ), so bleibt die Gesamtenergie  $E$  erhalten

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V = const. \quad (2)$$

und die Arbeit  $W_\gamma$  ist dann nur noch von Anfangs- und Endpunkt abhängig.

Bei einer eindimensionalen Bewegung eines Teilchens in einem Potential  $V(x)$  liefert die Energieerhaltung die Bahn  $x(t)$  über:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \quad (3)$$

## 2 Lagrange-Formulierung der Mechanik

In der NEWTON'schen Mechanik konnte ein Teilchen sich durch den ganzen Raum bewegen. In vielen realen Fällen ist dies nicht möglich, und viele Bewegungen sind eingeschränkt. Deshalb brauchen wir einen neuen Zugang um solche Probleme zu lösen.

### 2.1 Zwangsbedingungen

Die sogenannten Freiheitsgrade sind Parameter des Systems, deren Anzahl festlegt, wie viele unabhängige Größen man angeben muss, um das System zu charakterisieren. Freie Massenpunkte haben jeweils drei Freiheitsgrade in der Bewegung.

Es gibt jedoch Systeme, wo die Bewegung der verschiedenen Massen einigen Nebenbedingungen unterliegt, welche die Freiheitsgrade einschränken. Diese Nebenbedingungen heißen Zwangsbedingungen und verursachen Zwangskräfte auf die Massen.

Eine holonome Zwangsbedingung in einem System von  $N$  Teilchen ist diejenige, die man durch eine Funktion der folgenden Form schreiben kann:

$$A(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad (4)$$

Als Beispiele nennt man eine Masse, die sich nur auf einer bestimmten Höhe bewegen kann ( $z - c = 0$ , s. Abbildung unten), oder zwei Massen die durch eine Stange auf einen festen Abstand zueinander gehalten werden ( $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - d = 0$ ). Wir werden es quasi immer mit holonomen Zwangsbedingungen zu tun haben.

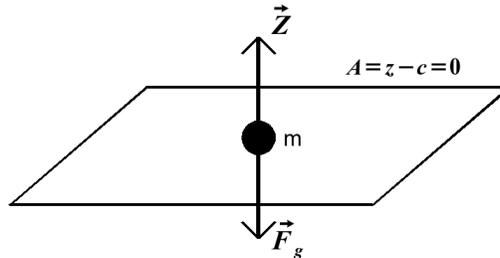
Holonome Zwangsbedingungen, die explizit von der Zeit abhängen heißen rheonom, zeitunabhängige holonome Zwangsbedingungen nennt man dagegen skleronom.

Nicht-holonome Zwangsbedingungen sind solche, die von der Geschwindigkeit der Massen abhängen, oder die nur in Form einer Ungleichung geschrieben werden können, z.B. bei einem Teilchen, das sich nur innerhalb eines Kugelvolumens mit Radius  $R$  bewegen kann ( $|\vec{r}| - R \leq 0$ ).

Jede holonome Zwangsbedingung reduziert die Anzahl der Freiheitsgrade jeweils um 1. Bei einem System von  $N$  Teilchen und  $k$  Zwangsbedingungen haben wir somit  $(3N - k)$  Freiheitsgrade.

Eine Zwangsbedingung  $A_i$  definiert eine Fläche. Es ist naheliegend, dass die zugehörige Zwangskraft senkrecht auf diese Fläche steht, sprich sie ist proportional zum Gradienten von  $A_i$

$$\vec{Z}_i = \lambda_i(t) \cdot \vec{\nabla} A_i(\vec{r}, t) \quad (5)$$



Eine Masse auf horizontaler Fläche mit eingezeichneter Gewichts- und Zwangskraft

Die glatt angenommene Funktion  $\lambda_i$  ist zeitabhängig, weil die Zwangskraft variabel sein kann. Die Kraft auf eine Masse setzt sich also aus allen angelegten Kräften und allen Zwangskräften zusammen. Konkret, mit zwei holonomen Zwangsbedingungen  $A_1$  und  $A_2$ :

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum_i \vec{F}_i + \vec{Z}_1 + \vec{Z}_2 = \sum_i \vec{F}_i + \lambda_1(t) \cdot \vec{\nabla} A_1(\vec{r}, t) + \lambda_2(t) \cdot \vec{\nabla} A_2(\vec{r}, t) \quad (6)$$

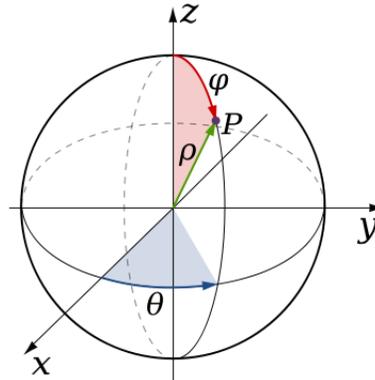
## 2.2 Generalisierte Koordinaten

Um mechanische Systeme zu beschreiben, ist es oft notwendig, sich von den üblichen kartesischen Koordinaten zu verabschieden, und sogenannte generalisierte Koordinaten  $q_i$  zu verwenden, die nicht die Dimension einer Länge haben müssen. Die zeitliche Änderung dieser Koordinaten  $\dot{q}_i$  bezeichnet man als generalisierte Geschwindigkeiten. Kennt man zu jedem Zeitpunkt gleichzeitig jede Koordinate und ihre Geschwindigkeit, so ist das System vollständig beschrieben. Grundsätzlich hat man genauso viele unabhängige Koordinaten wie Freiheitsgrade, egal wie sie gewählt sind.

Es gibt immer eine Transformation zwischen den kartesischen und den generalisierten Koordinaten:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}_1(q_1, \dots, q_n, t) \\ &\vdots \\ \vec{r}_N &= \vec{r}_N(q_1, \dots, q_n, t)\end{aligned}$$

z.B. die Transformation von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten bei festem Radius  $\rho$ :



$$\begin{aligned}x(\varphi, \theta, t) &= \rho \cdot \sin \varphi(t) \cdot \cos \theta(t) \\ y(\varphi, \theta, t) &= \rho \cdot \sin \varphi(t) \cdot \sin \theta(t) \\ z(\varphi, \theta, t) &= \rho \cdot \cos \varphi(t)\end{aligned}$$

Kugelkoordinaten-Transformation

### 2.3 D'Alembert-Prinzip

Wir betrachten nun ein System mit einer holonomen Zwangsbedingung  $A(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$ . Dazu definieren wir virtuelle Verrückungen  $\delta\vec{r}_i$ , infinitesimale Veränderungen der Systemkonfiguration mit folgenden Eigenschaften:

- Sie erfolgen bei feststehender Zeit ( $\delta t = 0$ ).
- Sie sind mit der Zwangsbedingung verträglich. Dazu müssen diese Verrückungen tangential zur Fläche stehen, die von der Zwangsbedingung festgelegt wird:

$$\delta\vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^N \delta\vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i A = 0 \quad (7)$$

Setzt man die Definition der Zwangskraft ein ( $\vec{Z}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \propto \vec{\nabla}_i A(\vec{r}, t)$ ), erhält man:

$$\boxed{\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0} \quad (8)$$

Dies ist das **D'ALEMBERT-Prinzip**, ein wichtiger Satz der Mechanik, der sowohl das 2. NEWTON'sche Axiom beinhaltet, sowie alle Bedingungen, die an die Zwangskräfte gestellt werden. Insbesondere verrichtet die Zwangsbedingung keine virtuelle Arbeit. Ist sie *zeitunabhängig*, verrichtet sie gar keine Arbeit.

## 2.4 Lagrange-Gleichungen 2. Art

Die einfachste Methode, ein System zu beschreiben, ist die generalisierten Koordinaten so zu wählen, dass sie den Zwangsbedingungen automatisch genügen. Sie sind dann in der Regel unabhängig voneinander, und beschreiben jeweils nur einen Freiheitsgrad.

Die virtuelle Verrückung kartesischer Koordinaten wird analog zum totalen Differential definiert:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (9)$$

Beachte: Der Term  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \delta t$  entfällt, weil nur die räumlichen Koordinaten variiert werden, und nicht die Zeit. Mit diesen Definitionen stellen wir die virtuelle Arbeit auf:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (10)$$

An dieser Stelle führe wir die sog. generalisierten Kräfte ein:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (11)$$

Nach wie vor gilt: Die generalisierten Kräfte müssen nicht die Dimension einer Kraft, aber  $Q_j \delta q_j$  die Dimension einer Arbeit haben, denn aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \quad (12)$$

Ferner:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \quad (13)$$

Mithilfe der Produktregel der Differentiation schreibt man:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \quad (14)$$

In der ersten Summe kann in der Ableitung  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$  im Zähler und Nenner gleichzeitig die Zeitableitungspunkte hinzufügen. Kurzer Beweis:

$$\dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \delta_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \quad \blacksquare \quad (16)$$

Daraus folgt:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] \delta q_j \quad (17)$$

Nochmalige Anwendung des gleichen Tricks mit der Produktregel:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 \right] \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j \end{aligned}$$

Vom D'ALEMBERT-Prinzip und der Definition von generalisierten Kräften ausgehend, folgt:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0 \quad (18)$$

Wegen der Unabhängigkeit aller Koordinaten  $q_i$  muss der Klammerterm verschwinden. Dies führt zur LAGRANGE-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0 \quad (19)$$

Für konservative Kräfte  $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V$  schreiben wir die generalisierten Kräfte um:

$$Q_\alpha = - \sum_i \vec{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \quad (20)$$

⇒ Die Kräfte  $Q_i$  haben ebenfalls ein Potential. Aus der LAGRANGE-Gleichung folgt dann:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - V) = 0 \quad (21)$$

Der Grund warum man im ersten Term ohne weiteres  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}$  abziehen kann, ist dass die potentielle Energie nicht von irgendeiner Geschwindigkeit  $\dot{q}_i$  abhängt, sprich  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$ . An dieser Stelle führen wir die LAGRANGE-Funktion  $\mathcal{L}$  ein,

$$\boxed{\mathcal{L} := T - V} \quad (22)$$

die als Beschreibung der Dynamik des Systems dient. Damit haben wir eine der wichtigsten Gleichungen der theoretischen Mechanik erreicht: Die LAGRANGE-Gleichung 2. Art, bzw. die EULER-LAGRANGE-Differentialgleichung:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0} \quad (23)$$

Der große Vorteil dieser Differentialgleichung ist, dass man daraus die Bewegungsgleichungen der Koordinaten  $q_i$  leicht ermitteln kann, ohne sich dabei Gedanken über die Zwangskräfte zu machen, da sie bereits eliminiert wurden. Zur Ermittlung der Bewegungsgleichung *einer* Koordinaten  $q_\alpha$  geht man also folgendermaßen vor:

- Zwangsbedingungen formulieren und generalisierte Koordinaten  $q_i$  festlegen.
- Potentielle und Kinetische Energie des gesamten Systems berechnen, ausgedrückt in den  $q_i$ .
- LAGRANGE-Funktion  $\mathcal{L} = T - V$  aufstellen, und sie einmal nach einem  $q_\alpha$  und einmal nach  $\dot{q}_\alpha$  differenzieren.
- Beiden Ableitungen in die EULER-LAGRANGE-Gleichung einsetzen. Dadurch erhält man eine Differentialgleichung in  $q_\alpha$ , welche die Bewegung entlang dieser Koordinate beschreibt.
- Den Vorgang für alle anderen Koordinaten wiederholen, um für jede ihre eigene Bewegungsgleichung zu bestimmen.

Wichtig: Für viele Aufgabenstellungen reicht die Aufstellung der Bewegungsgleichung aus! Oft sind diese gar nicht analytisch lösbar. Man muss also schauen, ob *nur* die Bewegungsgleichung gefragt ist, oder auch die explizite Lösung.

## 2.5 Lagrange-Gleichungen 1. Art

Es gibt Situationen wo die Zwangskräfte doch gefragt sind, weshalb der Ansatz mit der LAGRANGE-Gleichung 2. Art nicht ganz geeignet ist. Ein System mit  $k$  Zwangsbedingungen wurde mit  $(3N - k)$  Koordinaten vollständig beschrieben, vorausgesetzt, sie haben die  $k$  Zwangsbedingungen automatisch erfüllt und waren unabhängig voneinander. Dies soll jetzt bewusst nicht mehr so sein. Wir wissen:

$$\sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0 \quad (24)$$

Dabei ist  $\mathcal{L}$  nicht mehr eine Funktion der  $3N - k$  unabhängigen generalisierten Koordinaten, sondern von *allen*  $3N$  Koordinaten  $q_i$ . Im Gegensatz zu früher verschwindet deshalb nicht jeder Klammerterm, denn die Koordinaten hängen zum Teil voneinander ab.

Das D'ALEMBERT-Prinzip sagt dass die Zwangskräfte keine virtuelle Arbeit verrichten

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial A_j}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \quad (25)$$

Dies ist eine allgemeingültige Nebenbedingung, die wir mithilfe von LAGRANGE-Multiplikatoren einbeziehen können. Diese  $k$  Gleichungen werden jeweils mit einem Parameter  $\lambda_j$  multipliziert und in die ersten  $3N$  Gleichungen eingesetzt:

$$\sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial A_j}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0 \quad (26)$$

Von den  $3N$  Koordinaten sind aufgrund der Zwangsbedingung nur  $(3N - k)$  unabhängig. Man spaltet die Summe auf in einen unabhängigen Teil, und einen Rest:

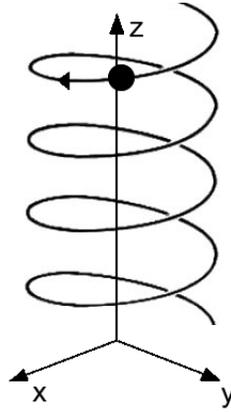
$$\sum_{i=1}^{3N-k} (...) \delta q_i + \sum_{i=3N-k+1}^{3N} (...) \delta q_i = 0 \quad (27)$$

Wegen der Unabhängigkeit aller Verrückungen in der ersten Summe müssen die Klammerterme und somit die ganze Summe gleich Null sein. Die LAGRANGE-Multiplikatoren müssen folglich so gewählt werden, dass die zweite Summe verschwindet. Daraus folgt die LAGRANGE-Gleichung 1. Art:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot \frac{\partial A_j}{\partial q_i}} \quad (28)$$

Ziel ist es, die LAGRANGE-Multiplikatoren  $\lambda_j$  zu eliminieren, und die Zwangskräfte daraus zu bestimmen.

**Beispiel:** Perle auf Schraubenlinie



Eine Perle gleitet reibungsfrei auf einer Schraubenlinie mit Radius  $R$ . Die Gravitationskraft wirkt in negative  $z$ -Richtung. Berechne den Bewegungsablauf und die Zwangskräfte (Anfangsbedingung:  $\dot{\phi}(0) = 0$ )

Es gibt hier zwei holonome Zwangsbedingungen, ausgedrückt in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} A_1 &= r - R = 0 \\ A_2 &= z - a\phi = 0 \end{aligned}$$

Die kinetische und potentielle Energie der zunächst freien Perle (Zwangsbedingung nicht berücksichtigt) lautet:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2) \\ V &= mgz \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2) - mgz \quad (29)$$

Für jede Koordinate  $q$  haben wir also folgende LAGRANGE-Gleichungen zu lösen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \lambda_1 \frac{\partial A_1}{\partial q} + \lambda_2 \frac{\partial A_2}{\partial q} = Z_q \quad (30)$$

Für die drei Koordinaten  $r$ ,  $z$  und  $\phi$  folgt also:

$$(i) \quad m\ddot{r} - m\dot{\phi}^2 r = \lambda_1 = Z_r \quad (31)$$

$$(ii) \quad m\ddot{z} + mg = \lambda_2 = Z_z \quad (32)$$

$$(iii) \quad mr^2\ddot{\phi} + 2mr\dot{\phi} = -a\lambda_2 = Z_\phi \quad (33)$$

Als nächstes setzt man nun die Zwangsbedingungen ein,

$$(i) \quad -m\dot{\phi}^2 R = \lambda_1 \quad (34)$$

$$(ii) \quad ma\ddot{\phi} + mg = \lambda_2 \quad (35)$$

$$(iii) \quad mR^2\ddot{\phi} = -a\lambda_2 \quad (36)$$

setzt Gleichung (ii) in Gleichung (iii) ein und erhält:

$$\ddot{\phi} = -\frac{ga}{a^2 + R^2} \Leftrightarrow \dot{\phi}(t) = -\frac{ga}{a^2 + R^2} \cdot t \quad (37)$$

Daraus kann man beide Parameter  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  bestimmen, und daraus wiederum die Zwangskräfte.

### 3 Hamilton'sches Variationsprinzip

Die EULER-LAGRANGE-Gleichung lässt sich aus einem viel allgemeineren Prinzip ableiten, das nicht nur in der Mechanik seine Verwendung findet. Zu jedem mechanischen System definiert man über die gesamte Bahn der Bewegung ein Funktional  $\mathcal{S}$ , das man Wirkung nennt.

$$\mathcal{S} := \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (i = 1, \dots, f) \quad (38)$$

Das HAMILTON'sche Prinzip, bzw. *Prinzip der kleinsten Wirkung* besagt, dass ein mechanisches System sich so weiterentwickelt, dass die Wirkung *stationär* ist (z.B. minimal). Es verschwindet jede Variation von  $\mathcal{S}$ :

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = 0 \quad (i = 1, \dots, f) \quad (39)$$

Gesucht sind die Funktionen  $\mathcal{L}$ , bzw. die Bahnen  $q_i(t)$  und  $\dot{q}_i(t)$  für die diese Relation gilt. Die „totale Variation“ der Lagrangefunktion lautet:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t}_{=0} \quad (40)$$

Zu diesem Term stellen wir das variierte Wirkungsintegral auf. Da das Integral absolut konvergent ist, kann man Integration und Summation vertauschen:

$$0 = \delta \mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \quad (41)$$

Partielle Integration des zweiten Summanden liefert:

$$\delta \mathcal{S} = \sum_{i=1}^n \left[ \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] \quad (42)$$

da  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ , nach Voraussetzung, fällt der zweite Term raus.

$$0 = \delta \mathcal{S} = \sum_{i=1}^n \left[ \int_{t_1}^{t_2} dt \delta q_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \quad (43)$$

Da die Wirkung für jede beliebige Variation  $\delta q_i$  verschwinden muss, kann nur noch der Klammerterm gleich Null sein:

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (44)$$

Somit haben wir die EULER-LAGRANGE-Differentialgleichung auf allgemeinstem Weg reproduziert, ohne Rücksicht auf Zwangsbedingungen oder eine geeignete Wahl der Koordinaten  $q_i$  zu nehmen. Die Lösung der Differentialgleichung für jeden Freiheitsgrad liefert die Bewegungsgleichung der entsprechenden Koordinaten.