

# Ferienkurs Experimentalphysik 4 - SS 2008

## 1 Verständnisfragen

- Was ist eine gute Quantenzahl? Was sind die guten Quantenzahlen der Wasserstoffniveaus wenn man sowohl die relativistische Energiekorrektur als auch die Feinstrukturaufspaltung berücksichtigt?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Feinstruktur und Zeeman-Effekt?
- Erklären Sie kurz welches quantenmechanische Bild das klassische Bild eines Bohrschen Atoms ersetzt.

## 2 Spin-Bahn-Kopplung

Die Feinstrukturaufspaltung der Wasserstoffniveaus entsteht durch die sogenannte Spin-Bahn-Kopplung: das magnetische Moment des Elektrons koppelt an das durch die eigene Bahnbewegung erzeugte Magnetfeld. Wir betrachten ein halbklassisches Modell der Spin-Bahn-Kopplung und wollen daraus einen Ausdruck für die Energieverschiebung der Wasserstoffniveaus herleiten.

- Betrachten wir zunächst das Wasserstoffatom aus dem Ruhesystem des Elektrons, dann bewegt sich der Kern um das Elektron. Welches Magnetfeld erzeugt er nach klassischer Rechnung am Ort des Elektrons?
- Wie sieht das Magnetfeld aus wenn man es klassisch ins Ruhesystem des Kerns transformiert?
- Bei vollständig relativistischer Behandlung des Feldes ergibt sich im Ruhesystem des Kerns ein zusätzlicher Faktor  $1/2$ , der *Thomas-Faktor* (eine schöne Herleitung des Thomas Faktors findet sich z.B. in *Jackson, klass. Elektrodynamik* auf S. 633-639). Leiten Sie nun unter Verwendung des transformierten Feldes einen Ausdruck für die Energieverschiebung  $\Delta E_{FS}$  her.
- Geben Sie die Verschiebung des 'Schwerpunkts' der Energieniveaus mit der Aufspaltung durch die Spin-Bahn-Kopplung an. Gewichten Sie dabei jedes Niveau  $(n, j)$  mit der Anzahl seiner magnetischen Unterzustände. Warum hätte man das Ergebnis so erwarten können?

## 3 Hyperfeinstruktur

Die Hyperfeinstruktur ist eine weitere Aufspaltung magnetischer Zustände, die analog zur Spin-Bahn-Kopplung durch die Kopplung des magnetischen Moments  $\mu_j$  eines Hüllenelektrons mit dem magnetischen Moment des Kerns  $\mu_I$  entsteht. Dabei bezeichnet  $\mathbf{j}$  den Gesamtspin des Hüllenelektrons,  $\mathbf{I}$  den Gesamtspin des Kerns, zusammen ergeben die beiden den Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{F} = \mathbf{j} + \mathbf{I}$ .

- Schätzen Sie das Verhältnis  $\frac{\Delta E_{HFS}}{\Delta E_{FS}}$  der Hyperfeinaufspaltung zur Aufspaltung durch die Spin-Bahn-Kopplung ab.
- Der Grundzustand des Deuteriums ist in zwei Hyperfein-Niveaus mit  $F = 1/2$  und  $F = 3/2$  aufgespalten. Welchen Wert muss entsprechend die dem Deuterium zugeordnete Spinquantenzahl  $I$  haben? Was kann man daraus über den Spin des Protons und Neutrons im Kern schließen?
- In welche Hyperfeinzustände spaltet dann das  $p_{3/2}$ -Niveau des Deuteriums auf?

## 4 Wasserstoffatom

Wir betrachten am Beispiel des  $2p \rightarrow 1s$  Übergang des Wasserstoffatoms atomare Übergänge in Ein-Elektronensystemen.

- (a) Verifizieren Sie, dass der  $2p \rightarrow 1s$  Übergang ein erlaubter elektrischer Dipolübergang ist, also die Bedingung  $\Delta l = \pm 1$  und  $\Delta m = 0, \pm 1$  erfüllt.
- (b) Zeigen Sie, dass die relative Linienbreite  $\frac{\Delta\omega}{\omega}$  des  $2p \rightarrow 1s$  Übergangs von der Größenordnung  $\alpha^3$  ist. Schätzen Sie dabei großzügig ab.  
(Hinweis: Die Linienbreite  $\Delta\omega$  entspricht der Zerfallswahrscheinlichkeit.)

*Die folgenden Formeln könnten sich als nützlich erweisen:*

$$R_{10}(r) = 2 a_B^{-3/2} e^{-r/a_B}, \quad R_{21}(r) = \frac{r}{\sqrt{24}} a_B^{-5/2} e^{-r/(2a_B)}, \quad \int_0^\infty x^n e^{-ax} = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, a > 0)$$