

Ferienkurs Experimentalphysik 4
Mittwoch, 20.08.2008

Inhaltsverzeichnis

1	Das Wasserstoffatom	2
1.1	Die Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom	2
1.2	Orbitale und Wahrscheinlichkeitsinterpretation	6
1.3	Zeeman-Effekt	7
1.4	Korrekturen zur einfachen Schrödingertheorie	8
1.4.1	relativistische Energiekorrektur	8
1.4.2	Feinstruktur	9
1.4.3	Hyperfineinstruktur	10

1 Das Wasserstoffatom

Wir werden uns in dieser Vorlesung mit dem Wasserstoffatom beschäftigen, dem einfachsten aller Atome. Es eignet sich ausgezeichnet als Modellsystem, in dem man die grundlegenden quantenmechanischen Strukturen von Atomen verstehen kann.

Das Wasserstoffatom ist ein **Einelektronensystem**, das Elektron bewegt sich dabei im kugelsymmetrischen Coulombpotential des (positiv) geladenen Kerns; das Atom ist ladungsneutral. Wie wir im folgenden sehen werden, ist die Schrödingergleichung unter diesen Voraussetzungen exakt analytisch lösbar.

Die Lösungen beschreiben die Eigenschaften des Wasserstoffatoms jedoch unvollständig: die experimentell sichtbare **Feinstruktur** und die **Hyperfeinstruktur** des Wasserstoffspektrums, die wir in dieser Vorlesung ebenfalls behandeln, werden von der nichtrelativistischen Theorie nicht vorhergesagt. Eigenschaften wie Elektronenspin und Kernspin folgen nur aus der vollen relativistischen Beschreibung des Wasserstoffatoms durch die Diracgleichung, in der nichtrelativistischen Theorie müssen sie zur Erklärung der experimentellen Spektren adhoc eingeführt werden.

Anhand der Ergebnisse für das Wasserstoffatom werden wir in dieser Vorlesung wichtige Begrifflichkeiten der Atomphysik diskutieren: die **Quantenzahlen** und ihre physikalische Bedeutung, die **Drehimpulskopplung** (z.B. Spin-Bahn-Kopplung) und die daraus resultierende Fein- und Hyperfeinstruktur und den **Zeemann-Effekt**.

1.1 Die Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom

In der folgenden Diskussion werden wir uns auf die physikalisch relevanten Ergebnisse und Aussagen konzentrieren, d.h. die notwendigen mathematischen Schritte werden erklärt aber nicht im Detail ausgeführt.

Wir betrachten allgemein ein Einelektronensystem bestehend aus einem positiven Kern (Ladung Ze , Masse m_K) und einem Elektron (Ladung $-e$, Masse m_e), dann ist die Schrödingergleichung des Systems

$$-\frac{\hbar^2}{2m_K} \Delta_K \psi(\mathbf{r}_K, \mathbf{r}_e) - \frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_e \psi(\mathbf{r}_K, \mathbf{r}_e) - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_e|} = E \psi(\mathbf{r}_K, \mathbf{r}_e) \quad (1)$$

Der erste Term repräsentiert die kinetische Energie des Elektrons, der zweite die des Kerns und der dritte die potentielle Energie des kugelsymmetrischen Coulombpotentials.

Analog zu einem klassischen Zweikörperproblem müssen wir nun zur Lösung des Problems die Bewegung der Schwerpunktkoordinate und die Relativbewegung separieren. Die Dynamik der Schwerpunktkoordinate ist für unsere Betrachtungen dann aber unwichtig, da sie keine Aussage über die Elektronenstruktur des Wasserstoffatoms macht.

Beginnen wir mit der Definition der Schwerpunkt- und Relativkoordinaten (sei $M := m_K + m_e$)

$$\mathbf{R} = \frac{m_K \mathbf{r}_K + m_e \mathbf{r}_e}{M} \quad (2)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_K - \mathbf{r}_e \quad (3)$$

Setzt man diesen Ansatz in (1) ein und vereinfacht die entstehenden Ausdrücke, dann erhält man

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_R \psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r \psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) - \frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0 r} = E \psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \quad (4)$$

wobei $\mu := (m_K m_e)/(m_K + m_e)$ die reduzierte Masse der Relativbewegung ist. Diese Gleichung ist nun offensichtlich separabel und wir erhalten mit dem Ansatz $\psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = g(\mathbf{R}) \cdot f(\mathbf{r})$

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{g(\mathbf{R})} \Delta_R g(\mathbf{R}) - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{f(\mathbf{r})} \Delta_r f(\mathbf{r}) - \frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0 r} = E_{ges} = const. \quad (5)$$

Die Summe der drei Terme muss also für beliebige Werte konstant sein, dies ist nur dann erfüllt wenn

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{g(\mathbf{R})} \Delta_R g(\mathbf{R}) = E_R = const. \quad (6)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{f(\mathbf{r})} \Delta_r f(\mathbf{r}) - \frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0 r} = E = const. \quad (7)$$

wobei $E_R + E = E_{ges}$.

Gleichung (6) beschreibt die kinetische Energie der Schwerpunktskoordinate des Wasserstoffatoms, die - wie oben erwähnt - für unsere Diskussion keine Rolle spielt.

Die Gleichung der Relativbewegung (7) ist formal identisch zur Schrödinger-Gleichung eines Teilchens mit Masse μ in einem kugelsymmetrischen Coulombpotential.

Man separiert nun diese Gleichung nach Radial- und Winkelanteil. Mathematisch erweist es sich als günstig zuerst nur die φ -Abhängigkeit abzuseparieren und dann anschließend erst r und θ zu separieren. Die Definitionsgleichung für die θ -Abhängigkeit ist dann eine *Legendre*-Differentialgleichung und ihre Lösungen sind die zugeordneten Legendrepolynome. Damit erhält man als Produktlösung für die φ - und θ -Abhängigkeit die **Kugelflächenfunktionen**, $Y_l^m(\theta, \varphi)$.

Die jeweilige Form der Kugelflächenfunktionen lässt sich problemlos in der einschlägigen Literatur oder im Internet nachschlagen. Wichtig ist, dass die Parameter l und m genügen den Winkelanteil der Lösung vollständig zu beschreiben, sie sind die **Quantenzahlen**, die den Winkelanteil charakterisieren! Wir werden auf die Bedeutung der Quantenzahlen etwas später noch einmal ausführlicher zu sprechen kommen.

Wir kennen also schon die Winkelabhängigkeit der Lösung und wählen damit nun für die Betrachtung der Radialgleichung den Produktansatz

$$f(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (8)$$

und erhalten folgende Gleichung für $R(r)$

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (9)$$

Die vollständige formale Lösung dieser Gleichung ist aufwendig und wenig instruktiv, eine schöne Herleitung ist z.B. in *Schwabl, Quantenmechanik* auf S. 124-129 zu finden.

Wir wenden stattdessen auf Gleichung (9) den Ansatz $R(r) = u(r) \cdot e^{-\kappa r}$ an ($\kappa = \sqrt{-2\mu E}/\hbar$), um einige wichtige Eigenschaften der Radialgleichung herzuleiten. Mit obigem Ansatz und der Abkürzung $c = \frac{\mu Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}$ erhält man die folgende Gleichung für $u(r)$

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + 2\left(\frac{1}{r} - \kappa\right) \frac{du(r)}{dr} + \left[\frac{2c - 2\kappa}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u(r) = 0 \quad (10)$$

Wählt man für $u(r)$ einen Potenzreihenansatz, $u(r) = \sum_i a_i r^i$ und setzt

diesen in obige Gleichung ein, dann erhält man durch Koeffizientenvergleich die folgende Rekursionsformel

$$a_i = \frac{2 a_{i-1} (i \cdot \kappa - c)}{i(i+1) - l(l+1)} \quad (11)$$

Die Radialfunktion $R(r)$ muss für $r \rightarrow \infty$ normierbar sein, das impliziert, dass die Potenzreihe bei einem endlichen i abbricht. Sei a_{n-1} der letzte nichtverschwindende Koeffizient, d.h. $i < n$, dann folgt sofort aus der Rekursionsformel für $a_n = 0$, dass $c = n\kappa$ und damit erhalten wir für die Energieeigenwerte

$$E_n = -\frac{\mu Z^2 e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}, \quad (12)$$

dies sind genau die Energien des Bohrschen Atommodells. Die Quantenzahl n , die die Energieniveaus des Wasserstoffatoms charakterisiert nennt man Hauptquantenzahl.

Aus der Lösung der Winkelgleichung wissen wir, dass l die Werte $0, 1, 2, \dots$ annehmen kann. In der Rekursionsformel erkennt man sofort, dass für $i < n$ der Nenner Null werden würde falls $i = l$. Folglich müssen alle Koeffizienten mit $i < l$ verschwinden, damit $u(r)$ endlich bleibt. Dies ist genau sichergestellt falls $l \leq i \leq n - 1$, d.h. wir kennen aus diesen Überlegungen die Abhängigkeit der Drehimpulsquantenzahl l von n :

$$l \leq n - 1 \quad (13)$$

Es ist interessant sich kurz klarzumachen woher die Quantisierung der oben hergeleiteten Energieniveaus kommt: wir haben den Ausdruck (12) letztlich aus der Bedingung erhalten, dass die Radialfunktion $R(r)$ für $r \rightarrow \infty$ normierbar sein soll. Das bedeutet nichts anderes als dass $\psi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, also nichts anderes als das wir das Elektron auf ein **endliches** Raumgebiet beschränken!

Die normierte Lösung der Radialgleichung ist durch die Funktion $R_{nl}(r)$ gegeben, die genaue Definition von $R_{nl}(r)$ über Laguerre-Polynome ist ebenfalls in der einschlägigen Literatur oder im Internet zu finden. Wichtig ist hier wiederum, dass die Quantenzahlen n und l genügen den Radialteil der Lösung vollständig zu charakterisieren.

1.2 Orbitale und Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Wir haben im vorigen Abschnitt die vollständige Lösung der Schrödinger-Gleichung für das Wasserstoffatom abgeleitet

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) \cdot Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (14)$$

Man nennt diese Wellenfunktionen auch **Orbitale** und charakterisiert sie durch die Angabe der 'guten' Quantenzahlen n , l und m .

Wir wollen an dieser Stelle einen kleinen Exkurs über **gute Quantenzahlen** machen. Formal nennt man eine Quantenzahl eine gute Quantenzahl wenn der Operator, deren Eigenwert sie ist, mit dem Hamiltonoperator kommutiert, also die entsprechende physikalische Größe eine Erhaltungsgröße ist. Dies bedeutet aber auch nichts anderes als das der entsprechende Zustand ohne äußere Einwirkung für alle Zeiten durch die Angabe dieser Quantenzahl(en) charakterisiert ist.

Nun zurück zu den Orbitalen. Aus der im vorigen Abschnitt hergeleiteten Formel für E_n erkennt man, dass die Energieniveaus nur von n abhängen. Wir wissen aber auch, dass es zu jedem l $2l + 1$ energetisch gleiche (oder entartete) Zustände gibt, die durch die Quantenzahl m charakterisiert werden. Damit muss auch das durch n charakterisierte Energieniveau entartet sein und zwar ist der Entartungsgrad

$$k = \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2 \quad (15)$$

d.h. es gibt zu jedem n n^2 Orbitale mit verschiedenen Quantenzahlen l und m , die die gleiche Energie haben.

In der Vorlesung am Dienstag wurde das Konzept vorgestellt, dass das Betragsquadrat der Wellenfunktion eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation im Sinne der Kopenhagener Deutung zulässt. Wir wollen nun dieses Konzept auf die Orbitale anwenden.

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ein Elektron in dr und $d\Omega$ zu finden ist

$$|\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)|^2 r^2 dr d\Omega. \quad (16)$$

Die Wahrscheinlichkeit ein Elektron im Intervall dr in einem Abstand r vom Kern zu finden ist - aufgrund der Normierung des Winkelanteils - gegeben durch

$$|R_{nl}(r)|^2 r^2 dr. \quad (17)$$

Damit können wir für jedes Orbital ausrechnen mit welcher Wahrscheinlichkeit sich das Elektron an welcher Stelle im Orbital bzw. in welchem radialen

Abstand aufhält. Diese Aufenthaltswahrscheinlichkeiten werden häufig in den vor allem aus der Chemie bekannten Orbitalgrafiken veranschaulicht.

Es ist wichtig an dieser Stelle innezuhalten und sich klar zu machen, dass wir uns mit unseren bisherigen Ergebnissen konzeptuell schon weit von der klassischen Physik entfernt haben. Im Gegensatz zum Bohrschen Atommodell können wir quantenmechanisch nicht von Kreisbahnen oder Ähnlichem reden, wir kennen nur die Wahrscheinlichkeit ein Elektron an einem gewissen Punkt innerhalb des Orbitals anzutreffen und seine Energie.

Hier zeigt sich, dass das Konzept des Zustands, das in der vorigen Vorlesung vorgestellt wurde, besser greift als das des (klassischen) Teilchens: Der Zustand ist das Orbital, er existiert unabhängig davon ob er besetzt ist oder nicht. Da er eine wohldefinierte Energie besitzt ist er räumlich ausgedehnt und wir kennen nur die Wahrscheinlichkeit ein Elektron an einem gewissen Ort im Orbital zu messen.

1.3 Zeeman-Effekt

Wir betrachten nun das Verhalten des Wasserstoffatoms in einem externen Magnetfeld. Die Herleitung der energetischen Aufspaltung der (magnetisch) entartete Energieniveaus - bekannt unter dem Namen **Zeeman-Effekt** - werden wir an einem halbklassischen Modell herleiten.

Dazu nehmen wir an, dass sich das Elektron auf einer klassischen Kreisbahn bewegt, deren Drehimpuls quantisiert ist, $|\mathbf{l}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$. Das umlaufende Elektron entspricht einem Kreisstrom $I = -\frac{ev}{2\pi r}$ und erzeugt damit ein magnetisches Moment

$$\mathbf{m} = I \mathbf{A} = -\frac{evr}{2} \hat{\mathbf{n}}, \quad (18)$$

wobei $\hat{\mathbf{n}}$ der Normalenvektor auf der umflossenen Kreisfläche ist. Der Bahndrehimpuls des Elektrons ist in diesem Modell gegeben durch

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m_e r v \hat{\mathbf{n}}. \quad (19)$$

Damit erhalten wir aus den beiden obigen Gleichungen sofort das magnetische Moment in Abhängigkeit vom Bahndrehimpuls

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{l}. \quad (20)$$

In einem externen Magnetfeld hat dieses magnetische Moment eine potentielle Energie

$$E_{pot} = -\mathbf{m} \mathbf{B} = \frac{e}{2m_e} \mathbf{l} \mathbf{B} \quad (21)$$

Die Quantisierungsachse des Drehimpulses richtet sich entlang des äußeren Magnetfelds aus, wir nennen diese Richtung die z-Richtung. Dann gilt wegen $l_z = m \hbar$

$$\Delta E_{Zeeman} = E_{pot} = \frac{e \hbar}{2m_e} m B \equiv \mu_b m B \quad (22)$$

wobei $\mu_b = \frac{e \hbar}{2m_e}$ das Bohrsche Magneton ist.

Das heißt in einem externen Magnetfeld sind die Energieniveaus des Wasserstoffs je nach magnetischer Spinquantenzahl des Unterniveaus um ΔE_{Zeeman} gegenüber E_n verschoben, das äußere Magnetfeld hebt also die energetische Entartung der magnetischen Unterniveaus auf.

Die Aufspaltung wird im Wasserstoff experimentell nicht genauso beobachtet! Das liegt daran, dass die Struktur des Wasserstoffspektrums durch die Fein- und Hyperfeinstruktur etc. auch ohne Magnetfeld schon deutlich komplizierter ist als bisher diskutiert.

1.4 Korrekturen zur einfachen Schrödingertheorie

Wie schon zuvor angedeutet unterscheiden sich die tatsächlich gemessenen Spektren deutlich von den Vorhersagen des in den vorigen Kapiteln entwickelten Atommodells. Wir werden uns daher im Folgenden mit den drei wichtigsten Modifikationen des Spektrums beschäftigen: der relativistischen Energiekorrektur, der Feinstruktur und der Hyperfeinstruktur.

1.4.1 relativistische Energiekorrektur

Die relativistische Energiekorrektur der Wasserstoffniveaus kommt daher, dass sich die Masse des gebundenen Elektrons in Folge der relativistischen Massenzunahme von der Ruhemasse m_e unterscheidet.

Man muss folglich die Energie des Elektron relativistisch behandeln, also

$$H = E_{kin} + E_{pot} = c \sqrt{m_e^2 c^2 + p^2} - m_e c^2 + E_{pot} \quad (23)$$

Diesen Ausdruck kann man wegen $p^2 \ll 2 m_e^2 c^2$ (das entspricht der Bedingung $E_{kin} \ll m_e c^2$) entwickeln,

$$\sqrt{1 + \frac{p^2}{m_e^2 c^2}} = 1 + \frac{p^2}{2 m_e^2 c^2} - \frac{p^4}{8 m_e^4 c^4} + \dots \quad (24)$$

Eingesetzt ergibt das (wobei wir nur die Korrektur erster Ordnung mitnehmen)

$$H = \underbrace{\frac{p^2}{2 m_e} + E_{pot}}_{E_{nr}} - \frac{p^4}{8 m_e^3 c^2} \quad (25)$$

Berechnet man den quantenmechanischen Erwartungswert (also $p \rightarrow -i\hbar\nabla$) des Korrekturterms, so ergibt sich der sogenannte *Darwin-Term*

$$\begin{aligned} \Delta E_r(n, l) &= \frac{\hbar^4}{8 m_e^3 c^2} \int \psi_{nlm}^* \nabla^4 \psi_{nlm} d^3r \\ &= E_{nr} \frac{Z^2 \alpha^2}{n} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{l + 1/2} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

Damit ist die Gesamtenergie eines Zustandes nun gegeben durch

$$E_{nl} = -\frac{\mu Z^2 e^4}{8 \varepsilon_0^2 \hbar^2 n^2} \left[1 - \frac{Z^2 \alpha^2}{n} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{l + 1/2} \right) \right] \quad (27)$$

Man sieht sofort, dass nun Orbitale mit gleichem n aber unterschiedlichem l nicht mehr entartet sind. Das ist auch intuitiv schlüssig, da ja in die Korrektur der Effekt der 'Bahnbewegung' auf die Masse des Elektrons eingeflossen ist.

1.4.2 Feinstruktur

Die Bewegung des Elektrons um den Atomkern erzeugt am Ort des Elektrons ein magnetisches Feld. Dieses koppelt an das Spinnmoment des Elektrons und führt zu einer (Zeeman-)Aufspaltung eines durch E_{nl} charakterisierten Energieniveaus in zwei Unterniveaus.

Man bezeichnet diese Kopplung der Bahnbewegung an das Spinnmoment als Spin-Bahn-Kopplung.

Eine Aufgabe des heutigen Übungsblattes führt durch die Herleitung der Spin-Bahn-Kopplungsenergie anhand eines semiklassischen Modells. Wir geben daher hier nur das Endergebnis an.

Die Spin-Bahn-Kopplungsenergie ist (mit j der Quantenzahl zu $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$)

$$\Delta E_{FS} = \frac{\mu_0 Z e^2 \hbar^2}{16 \pi m_e^2 r^3} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \quad (28)$$

Berücksichtigt man nun noch die relativistische Energiekorrektur, dann ergibt sich für die Energie eines Zustands

$$E_{nj} = -\frac{\mu Z^2 e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2 n^2} \left[1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) \right] \quad (29)$$

Man sieht sofort, dass hier Zustände mit gleichem n und j energetisch entartet sind; die Energie des Zustandes ist unabhängig von seiner Drehimpulsquantenzahl l .

Dies sollte auch so sein, denn unter Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung sind nur noch n und j (und m_j) gute Quantenzahlen, l , s und m sind hier keine guten Quantenzahlen mehr! Anschaulich kann man sich vorstellen, dass \mathbf{l} und \mathbf{s} um die Achse von \mathbf{j} präzessieren, ihre Summe also immer konstant \mathbf{j} ergibt, die Richtung von \mathbf{l} und \mathbf{s} sich aber ständig ändert.

1.4.3 Hyperfeinstruktur

Die Hyperfeinstruktur ist nur bei sehr hoher spektraler Auflösung beobachtbar. Sie entsteht völlig analog zur Feinstruktur aus der Kopplung des Kernmoments μ_k an den Gesamtdrehimpuls \mathbf{j} . Die Energieaufspaltung aufgrund der Hyperfeinstruktur ist im Wasserstoffatom um etwa zwei Größenordnungen kleiner als die der Feinstruktur.

Unter Berücksichtigung der Hyperfeinaufspaltung ist die Energie eines Zustands gegeben durch

$$E_{HFS} = E_{nj} + \frac{A}{2} [(F(F+1) - j(j+1) - I(I+1))] \quad (30)$$

dabei ist F die Quantenzahl zu

$$\mathbf{F} = \mathbf{j} + \mathbf{I} \quad (31)$$

wobei \mathbf{I} der Kernspin ist, der das magnetische Moment des Kerns erzeugt

$$\vec{\mu}_I = g_I \frac{\mu_k}{\hbar} \vec{I} \quad (32)$$

Die Konstante $A(B_j, j)$ ist die Hyperfeinkonstante, im Falle des Wasserstoffatoms ist sie gegeben durch

$$A(B_j, j) = \frac{g_I \mu_k B_j}{\sqrt{j(j+1)}} \quad (33)$$

hängt also sowohl vom Gesamtdrehimpuls j , als auch dem durch \mathbf{j} erzeugten Magnetfeld B_j ab.

Die guten Quantenzahlen sind hier n , F und f . j ist keine gute Quantenzahl mehr, da \mathbf{j} und \mathbf{I} zwar in der Summe konstant \mathbf{F} ergeben aber um die Achse von \mathbf{F} präzessieren.

Eine Aufgabe des heutigen Übungsblattes beschäftigt sich mit der Hyperfeinstruktur im Deuterium, das die gleiche Elektronenkonfiguration wie Wasserstoff hat.

Alle hier diskutierten Energieverschiebungen sind experimentell nachweisbar. Darüber hinaus gibt es im Wasserstoffatom noch die *Lamb-Verschiebung*, die sich in der QED berechnen lässt.

Die hier anhand der nichtrelativistischen Schrödingertheorie hergeleiteten Effekte ergeben sich (natürlicher) auch aus der relativistischen Dirac-Theorie.