

Musterlösung: Spektroskopie und Streuung

TU München - Sommersemester 08

1 Streuung am Coulomb-Feld

a) Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist gegeben durch:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta = \frac{b}{\sin\theta} \left|\frac{db}{d\theta}\right| \quad (1)$$

Der Zusammenhang zwischen Stossparameter b und Ablenkwinkel θ ist

$$b = \frac{C}{2E} \cot\frac{1}{2}\theta \quad \text{mit } C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * ZZ'e^2 \quad (2)$$

Im wesentlichen muss $db/d\theta$ berechnet werden, dazu werden folgende Ersetzungen durchgeführt:

$$\cot\frac{1}{2}\theta = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \quad (3)$$

$$\sin\theta = 2 \cdot \cos\frac{1}{2}\theta \cdot \sin\frac{1}{2}\theta \quad (4)$$

$$\rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta = \frac{C}{2 \cdot E} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \cdot \frac{1}{2 \cdot \cos\frac{1}{2}\theta \cdot \sin\frac{1}{2}\theta} \cdot \frac{C}{2 \cdot E} \cdot \left(\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right)' \quad (5)$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{ZZ'e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot E}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\theta} \cdot \left(\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right)' \quad (6)$$

Die Ableitung:

$$\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right)' = \frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\theta \cdot \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\theta \cdot \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\theta}{\sin^2\frac{1}{2}\theta} \quad (7)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\sin^2\frac{1}{2}\theta + \cos^2\frac{1}{2}\theta}{\sin^2\frac{1}{2}\theta} = -\frac{1}{2 \cdot \sin^2\frac{1}{2}\theta} \quad (8)$$

Es folgt der differentielle Wirkungsquerschnitt:

$$\rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta = \left(\frac{ZZ'e^2}{16\pi\epsilon_0 \cdot E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{1}{2}\theta} \quad (9)$$

Was der bekannte Rutherford-Wirkungsquerschnitt ist.

b) Es zeigen sich klare Abweichungen vom erwarteten Verhalten für die Streuung am Coulombfeld einer Punktladung. Wenn man sich die Formel für den Zusammenhang von Stossparameter b und Ablenkwinkel θ ansieht

$$b = \frac{C}{2E} \cot \frac{1}{2} \theta \quad (10)$$

erkennt man, dass bei hohen Energien und konstantem Winkel der Stossparameter abnimmt. Gleiches gilt für konstante Einschussenergie und ansteigendem Polarwinkel θ . Ab einem gewissen minimalen Stossparameter b_{min} kommen die kurzreichweitigen (hier attraktiven) starken Kernkräfte ins Spiel. Die z.B. sonst unter 60° abgelenkten Teilchen werden dann eher zum Kern hin gezogen, was hier den Wirkungsquerschnitt einbrechen lässt. An der Stelle wo der Einfluss der Kernkräfte den Coulombanteil zu stark beeinflusst wird praktischerweise der Kernradius festgemacht.

c) Die Abschätzformel $r_K \approx r_0 \cdot A^{1/3}$ geht im wesentlichen davon aus, dass sich der Kernradius (bei kugelförmigen Kernen) einfach durch das aufeinanderstapeln von kleinen Kügelchen zum Kern berechnen lässt. Der Radius wächst entsprechend mit $A^{1/3}$. Dieser Radius sollte dann in etwa einem minimalen Radius r_{min} entsprechen, der mit dem minimalen Stossparameter b_{min} aus Aufgabe b) wie folgt zusammenhängt: $b_{min} = r_{min} + r_{He}$. Also der Summe aus dem Targetkernradius (Gold) und dem Projektilradius (Helium). b_{min} ergibt sich dann zu:

$$b_{min} = r_{min} + r_{He} = r_0 \cdot A_{Au}^{1/3} + r_0 \cdot A_{He}^{1/3} = 1.2 \cdot 10^{-15} m \cdot (197^{1/3} + 4^{1/3}) = 8.89 fm \quad (11)$$

(Für Helium ist die Näherungsformel eigentlich nicht gültig) b_{min} wird jetzt mit Gleichung 10 mit den Werten $E \approx 27 MeV$, $\theta = 60^\circ$, $Z = 2$ und $Z' = 97$ berechnet:

$$b_{min} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * ZZ'e^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \cot \frac{1}{2} \theta \quad (12)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * 2 \cdot 97 \cdot e^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 27 \cdot 10^6 eV} \cdot \cot \frac{1}{2} 60^\circ = 8.96 fm \quad (13)$$

Im zweiten Fall ist die Energie konstant bei $E = 10 MeV$ und der Winkel für die Abweichung wurde zu $\theta_{min} = 115^\circ$ geschätzt. Die Rechnung läuft äquivalent:

$$b_{min} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * ZZ'e^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \cot \frac{1}{2} \theta \quad (14)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * 2 \cdot 97 \cdot e^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 10 \cdot 10^6 eV} \cdot \cot \frac{1}{2} 115^\circ = 9.07 fm \quad (15)$$

Die drei berechneten Werte liegen also alle nahe beieinander.

d) Zum einen kann es bei dicken Targets zu Mehrfachstreuungen kommen, was natürlich die Messergebnisse verschmiert. Weiterhin ist die Definition des totalen Wirkungsquerschnitts darauf angewiesen, dass sich die einzelnen Wirkungsquerschnitte von jedem Streuer nicht überlagern. Würde man z.B. die Targetdicke stark vergrößern würde jedes Teilchen abgelenkt werden, eine Messung des totalen Wirkungsquerschnitts wäre damit hinfällig.

e) Die Luminosität berechnet sich zu:

$$L = \frac{\dot{N}_S}{A} \cdot n_T \cdot A = \dot{N}_S \cdot \frac{N_A}{V_{mol}} \cdot d_T = 2.95 \cdot 10^{27} \frac{1}{m^2 s} \quad (16)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\theta = \left(\frac{ZZ'e^2}{16\pi\epsilon_0 \cdot E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{1}{2}\theta} = 1.44 \cdot 10^{-29} m^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{1}{2}\theta} \quad (17)$$

Mit $\dot{N} = L \cdot (d\sigma/d\Omega) \cdot \Delta\Omega$ und dem Raumwinkelelement $\Delta\Omega = A/r^2 = 4 \cdot 10^{-4}$ ergeben sich folgende Zählraten:

$$\theta = 5^\circ : \dot{N} = 4.7/s \quad (18)$$

$$\theta = 10^\circ : \dot{N} = 0.29/s \quad (19)$$

$$\theta = 25^\circ : \dot{N} = 0.0077/s \quad (20)$$

$$(21)$$

2 Mikrowellenabsorption

Zunächst kann man die Frequenz und die Energie des Rotationsübergangs berechnen:

$$\nu_{ik} = 2c \cdot B_e \cdot (J_i + 1) \quad \text{mit } B_e = 201/m \quad \text{und } J_i = 1 \quad (22)$$

$$= 2.41 \cdot 10^{11} s^{-1} \quad (23)$$

$$\rightarrow E_{rot} = h\nu = 1.6 \cdot 10^{-22} J \quad (24)$$

Die thermische Energie E_{th} ergibt sich bei 100 K und bei 300 K zu:

$$E_{th}(100K) = k_B \cdot T = 1.38 \cdot 10^{-21} J \quad (25)$$

$$E_{th}(300K) = k_B \cdot T = 4.14 \cdot 10^{-21} J \quad (26)$$

Man kann also die Näherung machen $h\nu \ll k_B T$. Um den Absorptionskoeffizienten $\alpha = [N_k - (g_k/g_i)N_i] \sigma_{ik}$ zu berechnen sind die Besetzungsdichten N_i und N_k zu bestimmen. Die Anzahldichten aller Moleküle bei dem Druck $p = 1 \text{ mbar} = 10^2 \text{ Pa}$ und den Temperaturen $T = 100K$ und $T = 300K$ sind:

$$p = N \cdot k_B \cdot T \quad (27)$$

$$\rightarrow N = p/(k_B \cdot T) \quad (28)$$

$$\rightarrow N(100K) = 7.25 \cdot 10^{22} m^{-3} \quad (29)$$

$$N(300K) = 2.42 \cdot 10^{22} m^{-3} \quad (30)$$

Die Besetzungsdichte im absorbierenden Niveau N_i ist:

$$N_i(J_i) = \frac{(2 \cdot J_i + 1)}{Z} \cdot N \cdot e^{-E_{rot}/kT} \quad (31)$$

mit der angegebenen Zustandssumme $Z = \sum_n g_n e^{-E_n/kT}$. Wobei $E_n = E_{rot,n} = h \cdot c \cdot B_e \cdot J_n(J_n + 1)$. Der Entartungsgrad g_n ist gegeben durch $g_n = (2J_n + 1)$. Der exp-Faktor gibt die Wichtung der Besetzung an. Die Zustandssumme kann jetzt auf zwei Arten berechnet werden:
a) durch einfaches aufsummieren über alle J-Werte:

$$Z_n = (2J_n + 1) \cdot e^{-(h \cdot c \cdot B_e \cdot J_n(J_n+1))/kT} \quad (32)$$

$$(h \cdot c \cdot B_e)/kT = 0.029 \quad (33)$$

$$Z_0 = 1 \cdot e^0 = 1 \quad (34)$$

$$Z_1 = 3 \cdot e^{-0.029 \cdot 2} = 2.8 \quad (35)$$

$$Z_2 = 5 \cdot e^{-0.029 \cdot 6} = 4.2 \quad (36)$$

$$Z_3 = 7 \cdot e^{-0.029 \cdot 12} = 5.0 \quad (37)$$

$$Z_4 = 9 \cdot e^{-0.029 \cdot 20} = 5.05 \quad (38)$$

$$Z_5 = 11 \cdot e^{-0.029 \cdot 30} = 4.62 \quad (39)$$

$$Z_6 = 13 \cdot e^{-0.029 \cdot 42} = 3.9 \quad (40)$$

$$Z_7 = 15 \cdot e^{-0.029 \cdot 56} = 3.0 \quad (41)$$

$$Z_8 = 17 \cdot e^{-0.029 \cdot 72} = 2.1 \quad (42)$$

$$Z_9 = 19 \cdot e^{-0.029 \cdot 90} = 1.4 \quad (43)$$

$$Z_{10} = 21 \cdot e^{-0.029 \cdot 110} = 0.9 \quad (44)$$

$$Z_{11} = 23 \cdot e^{-0.029 \cdot 132} = 0.5 \quad (45)$$

$$Z_{12} = 25 \cdot e^{-0.029 \cdot 156} = 0.3 \quad (46)$$

$$Z_{13} = 27 \cdot e^{-0.029 \cdot 182} = 0.1 \quad (47)$$

$$\rightarrow Z = 34.8 \quad (48)$$

Was allerdings ziemlich aufwendig ist. Einfacher geht die Näherung über die Integration (da man über ganze Zahlen summiert ist die Breite gleich 1, also Summe ungefähr gleich Integration):

$$Z \approx \int_0^{\infty} (2J + 1) e^{-(h \cdot c \cdot B_e \cdot J(J+1))/kT} dJ = \frac{kT}{h \cdot B_e} = 34.56 \quad (49)$$

Die Stammfunktion kann man relativ einfach bestimmen: Wenn man die Exponentialfunktion ableitet, kommt genau der Vorfaktor $(2J + 1) \cdot \frac{kT}{h \cdot B_e}$ heraus. Also ist die Stammfunktion:

$$-\frac{kT}{h \cdot B_e} \cdot e^{-(h \cdot c \cdot B_e \cdot J(J+1))/kT} \quad (50)$$

Mit den Grenzen 0 und ∞ erhält man obiges Ergebnis. Daraus folgt für die Besetzungsdichte im absorbierenden Niveau mit $J_i = 1$:

$$N_i(J_i) = \frac{(2 \cdot J_i + 1)}{Z} \cdot N \cdot e^{-E_{rot}/kT} = 5.6 \cdot 10^{21} \quad (51)$$

Der Absorptionskoeffizient α ist:

$$\alpha = [N_i - (g_i/g_k)N_k]\sigma_{ik} \quad (52)$$

Wobei die Besetzung im Zustand N_k gegeben ist durch

$$N_k = N_i \cdot \frac{g_k}{g_i} \cdot e^{-\Delta E_{rot}/kT} \quad (53)$$

Man sieht, dass der Faktor g_i/g_k herausfällt.

$$\alpha = [N_i \cdot (1 - e^{-\Delta E_{rot}/kT})]\sigma_{ik} \quad (54)$$

$$\alpha(100K) = 6.1 \cdot 10^{-4} \quad (55)$$

$$\alpha(300K) = 7.6 \cdot 10^{-5} \quad (56)$$

Und damit ergibt sich die Absorption gemäss

$$I_t(\nu) = I_0 \cdot e^{-\alpha(\nu) \cdot x} \quad (57)$$

zu

$$\frac{I_t}{I_0} = e^{-6.1 \cdot 10^{-4} \cdot 1} = 0.99939 \quad (58)$$

$$\frac{I_t}{I_0} = e^{-7.6 \cdot 10^{-5} \cdot 1} = 0.999924 \quad (59)$$

3 Linienverbreiterung

a) Aus der Formel für die dopplerverschobene Strahlungsleistung

$$P(\omega) = P(\omega_0) \cdot e^{-[c(\omega-\omega_0)/(\omega \cdot v_w)]^2} \quad (60)$$

muss man die Breite bei halber Höhe bestimmen ($P(\omega)$ ist eine Gaussverteilung). Also $P(\omega) = 1/2P(\omega_0)$

$$1/2P(\omega_0) = P(\omega_0) \cdot e^{-[c(\omega-\omega_0)/(\omega_0 \cdot v_w)]^2} \quad (61)$$

$$\rightarrow \sqrt{-\ln(1/2)} = c(\omega - \omega_0)/(\omega_0 \cdot v_w) \quad (62)$$

$$\rightarrow \sqrt{\ln(2)} \cdot (\omega_0 \cdot v_w)/c = \omega - \omega_0 = 1/2\Delta\omega \quad (63)$$

$$\rightarrow \Delta\omega = 2 \cdot \sqrt{\ln(2)} \cdot (\omega_0 \cdot v_w)/c \quad (64)$$

Jetzt muss noch die wahrscheinlichste Geschwindigkeit $v_w = \sqrt{(2k_B \cdot T/m)}$ eingesetzt werden:

$$\Delta\omega = (\omega_0/c) \cdot \sqrt{8k_B \cdot T \cdot \ln(2)/m} \quad (65)$$

mit $\nu = \omega/2\pi$ erhält man schliesslich:

$$\Delta\nu = (\nu_0/c) \cdot \sqrt{8k_B \cdot T \cdot \ln(2)/m} \quad (66)$$

b) Als erstes wird dir Frequenz aus der angegebenen Wellenlänge $\lambda_0 = 589.1nm$ berechnet:

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} = 5.08 \cdot 10^{14} Hz \quad (67)$$

Die Masse m berechnet sich zu:

$$m = M/N_A = 3.82 \cdot 10^{-26} kg \quad (68)$$

Mit der Temperatur von $T = 500K$ erhält man dann eine Dopplerbreite von:

$$\Delta\nu = 1.7 \cdot 10^9 Hz \quad (69)$$

Die Wellenlängenverbreiterung ergibt sich zu:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \rightarrow d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu = 2 \cdot 10^{-3} nm \quad (70)$$

c) Die natürliche Linienbreite eines Übergangs ist gegeben durch: $\delta\nu = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\tau_k} \right)$. Das Zielineau ist der Grundzustand, also ist $\tau_k = \infty$. Daraus folgt:

$$d\nu = \frac{1}{16 \cdot 10^9 s \cdot 2\pi} = 9.95 \cdot 10^6 s^{-1} = 9.95 MHz \quad (71)$$

Die Wellenlängenverbreiterung ergibt sich zu:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \rightarrow d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu = 1.14 \cdot 10^{-5} nm \quad (72)$$

d) Der y-Achsenabschnitt der Auftragung aus Abb. 1 ergibt $1/\tau^{spontan}$, aus der Steigung erhält man den elastischen Streuquerschnitt σ_i^{elas} . $n_B \cdot v_{AB}$ kann wie in der Vorlesung durch Druck p und Temperatur T ausgedrückt werden.

e) Wie aus der Vorlesung bekannt, nimmt die Linienverbreiterung linear mit dem Druck zu. Daher auch die Angabe im Aufgabenblatt. Die Frequenzverbreiterung berechnet sich zu:

$$d\nu = 0.071/(s \cdot Pa) \cdot 10^6 \cdot p \quad (73)$$

bei $p = 1.013 \cdot 10^5 Pa$ (Normaldruck) ergibt sich

$$d\nu = 7.09 \cdot 10^9 Hz \quad (74)$$

bei einer Grundfrequenz von $\nu = c/\lambda = c/(589.1nm) = 5.09 \cdot 10^{14} Hz$. Die Wellenlängenverbreiterung ist dann

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \rightarrow d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu = 8.2 \cdot 10^{-3} nm \quad (75)$$

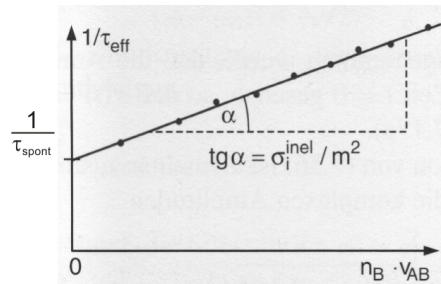


Figure 1: Inverse effektive Lebensdauer als Funktion der Dichte des Stossparterns B. Bild aus Demtröder Experimentalphysik 3.

Für $p = 10 \text{ bar} = 10^6 \text{ Pa}$ ergibt sich $d\nu = 7 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$ und $d\lambda = 8.1 \cdot 10^{-2} \text{ nm}$.

f) Man sieht, dass die natürliche Linienbreite um ca. 2 Größenordnungen kleiner ist als die der Druckverbreiterung bei Normaldruck bzw. der Dopplerverbreiterung. Bei hohen Drücken und Temperaturen können eng benachbarte Linien, wie bei der Natrium-D Doppellinie überlappen. Ein kontinuierliches Spektrum kann erzeugt werden, indem z.B. ein freies Elektron mit der kinetischen Energie E_{kin} von einem zuvor ionisiertem Atom eingefangen wird. Das emittierte Photon hat dann die Energie $h \cdot \nu = E_{kin} + E_B$, wobei E_B die Bindungsenergie des Zustandes ist. Da E_{kin} nicht gequantelt ist ergibt sich ein kontinuierliches Emissionsspektrum. Das gleiche gilt auch für die Absorption und der entsprechenden Ionisation des Atoms.

Eine andere Möglichkeit ist die Bremsstrahlung, also die Abbremsung von Elektronen im Coulombfeld des Kerns. Auch hier entsteht ein kontinuierliches Spektrum.

4 Dopplerfreie Zweiphotonenabsorption

a) Es kann natürlich auch passieren, dass zwei Photonen aus einer Strahlrichtung absorbiert werden. Diese werden dann natürlich nicht bei $\omega = 1/2\omega_0$ absorbiert sondern bei einer dopplerverschobenen Frequenz. Dies führt zu dem dopplerfreien Peak zu einem Doppleruntergrund.

b) Aus a) kennen wir die Ursache für den Untergrund. Bei einer Geschwindigkeitsklasse der Moleküle (z.B. $v + \Delta v$) wird bei einer Frequenz ω der Laser nur eine Strahlrichtung zur Absorption beitragen, da die andere Richtung dann entsprechend falsch dopplerverschoben ist. Die nutzbare Intensität ist dementsprechend nur I_0 von einem Strahl, die entsprechende Signalstärke ist dann $S_{\omega \neq \omega_0} \sim \frac{dW}{dt} = \sigma(v + \Delta v) \cdot I_0$. Wobei der Absorptionsquerschnitt mit der Maxwellgeschwindigkeitsverteilung der Moleküle gefaltet ist. Bei der Frequenz $\omega = \omega_0$ absorbieren alle Moleküle egal welche Geschwindigkeit sie haben mit der Intensität beider Laser: $S_{\omega = \omega_0} \sim \frac{dW}{dt} = \sigma_{tot} \cdot 2 \cdot I_0$. Insgesamt ist die dopplerfreie Fläche also doppelt so gross, wie die rote Fläche.

c) Die Breite des Doppleruntergrundes bei Zweiphotonenabsorption ist halb so breit, wie bei

der Einphotonenabsorption. Dies liegt daran, dass nur die halbe Frequenz eingestrahlt wird. Daraus ergibt sich die Bedingung $2 \cdot \omega = \omega_0 + k_z \cdot v_z$. Setzt man dies in die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung ein, ergibt sich eine halb so breite Gaussverteilung wie bei der Einphotonenabsorption. (Hinweis: in Demtröder Band 3 wird die Breite doppelt so breit...)

5 Spektren fremder Planeten

Da Planeten in der Regel nicht strahlen muss ein Absorptionsspektrum der extrasolaren Sonne in der Atmosphäre des Planeten gemessen werden. Hierbei gibt es das Problem, dass zum einen immer das Spektrum des Sterns mitmisst und zum zweiten die Absorption des Planeten klein ist. Man misst zwei Spektren, eines mit und eines ohne Planeten. Die Differenz der Spektren ergibt das Absorptionsspektrum des Planeten (siehe Abb. 2).

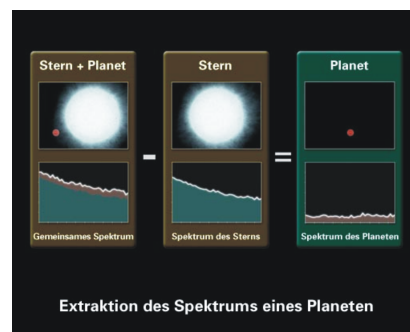


Figure 2: Zur Bestimmung des Spektrums von extrasolaren Planeten.