1. Auf zwei parallelen Schienen im Abstand $d = 5,0\,\mathrm{cm}$ gleite ein senkrecht dazu verlaufender Draht $(m = 50\,\mathrm{g})$ reibungsfrei. Die Schienen seien am linken Ende über einen Ohmschen Widerstand 10Ω verbunden. (Der Widerstand in den Schienen und im Draht ist zu vernachlässigen). Senkrecht dazu (in die Zeichenebene hinein) stehe ein Magnetfeld der Stärke $B = 4,0\,\mathrm{T}$. Der Draht ruhe am Anfang am linken Ende der Schienen ($x = 0\,\mathrm{m}$).
   a) Der Draht werde zum Zeitpunkt $t = 0\,\mathrm{s}$ angestoßen und bewege sich anfangs mit der Geschwindigkeit $v(0) = v_0 = 2,0\,\mathrm{ms}^{-1}$ nach rechts. In welche Richtung fließt der entstehende Induktionsstrom und wie groß ist er am Anfang? Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Draht auf und lösen Sie sie. In welchem Abstand hält der Draht an?
   b) Zusätzlich zum Widerstand werde nun noch eine Gleichspannungsquelle geschaltet ($U = 1,0\,\mathrm{V}$). Der Draht ruhe wieder am linken Ende der Schienen. Wie muss diese gepolt sein, damit der Draht sich nach rechts bewegt? Stellen Sie auch für diesen Fall die Bewegungsgleichung auf und lösen Sie sie. Welche Endgeschwindigkeit erreicht der Draht?

<u>a) Lösung:</u>

Rechte-Hand-Regel: Der Strom fließt im Draht nach oben, also im Gegenuhrzeigersinn

Maschenregel:

$$U_R - U_{ind} = 0$$

$$RI(t) + \dot{\Phi}(t) = RI(t) + Bdv(t) = 0$$

$$\Rightarrow I(t) = -\frac{Bd}{R}v(t)$$

Daraus folgt für den Strom am Anfang:

$$I_0 = -\frac{Bd}{R}v_0 = 40\,\mathrm{mA} \qquad \text{(B negativ, da gegen z-Richtung)}$$

Lorentzkraft: $F_L = BdI(t) = m\dot{v}(t)$

Differentialgleichung: $\dot{v}(t) = -\frac{B^2d^2}{Rm}v(t)$ Anfangsbedingung: $v(0\,\mathrm{s}) = v_0$

Ansatz: $v(t) = v_0 \exp[\lambda t]$

$$\lambda v_0 \exp[\lambda t] = -\frac{B^2d^2}{Rm}v_0 \exp[\lambda t] \qquad \Rightarrow \lambda = -\frac{B^2d^2}{Rm} = -0,08\,\mathrm{s}^{-1}$$

Ergebnis: Stromstärke $\boxed{I(t) = 40\,\mathrm{mA}\exp\left[-0,08\,\mathrm{s}^{-1}t\right]}$

$$x(t) = \int_0^t v(\tau)\,d\tau = -\frac{Rm}{B^2d^2}v_0\exp\left[-\frac{B^2d^2}{Rm}t\right] + \frac{Rm}{B^2d^2}v_0 = x_e\left(1 - \exp\left[-\frac{B^2d^2}{Rm}t\right]\right)$$

$$\boxed{x(t) = 25\,\mathrm{m}\left(1 - \exp\left[-0,08\,\mathrm{s}^{-1}t\right]\right)} \qquad \boxed{x_e = \frac{Rm}{B^2d^2}v_0 = 25\,\mathrm{m}}$$

Der Draht bleibt also nach 25m stehen.

b) Lösung:

Die Kraft soll nach rechts zeigen, also muss der Strom in dem Draht nach unten fließen, d.h. Pluspol oben, Minuspol unten.

Maschenregel: $U_0 = U_R - U_{ind} = RI(t) + \dot{\Phi}(t) = RI(t) + Bdv(t)$

Lorentzkraft: $F_L = BdI(t) = m\dot{v}(t)$

Zusammen: $\dot{v}(t) + \frac{B^2d^2}{Rm} v(t) = \frac{Bd}{Rm} U_0$

Partikuläre Lösung: $v_p(t) = \frac{U_0}{Bd} = 5ms^{-1}$

Homogene Lösung: $v_h(t) = C\exp\left[-\frac{B^2d^2}{Rm}t\right]$

$v(t) = v_p(t) + v_h(t)$

Anfangsbedingung: $v(0) = 0 \qquad \Rightarrow C = -\frac{U_0}{Bd}$

Zusammen: $\boxed{v(t) = 5ms^{-1}\left(1 - \exp\left[-0,08s^{-1}t\right]\right)}$

Der Draht erreicht also eine Endgeschwindigkeit von $v_e = 5ms^{-1}$. In diesem Zustand ist die Induktionsspannung genauso groß wie U_0, d.h. es fließt kein Strom.

$$x(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau = v_e\left(t + \frac{Rm}{B^2d^2}\exp\left[-\frac{B^2d^2}{Rm}t\right]\right) - v_e\frac{Rm}{B^2d^2}$$

$$\boxed{x(t) = 5ms^{-1}t + 62,5m\left(\exp\left[-0,08s^{-1}t\right] - 1\right)}$$

2. Eine quadratische Leiterschleife (Kantenlänge a, Masse m, Widerstand R) falle senkrecht durch ein homogenes Magnetfeld B. Zum Zeitpunkt $t = 0s$ trete die Leiterschleife aus der Ruhe in das Magnetfeld ein. Stellen Sie die Bewegungsgleichung der Leiterschleife beim Eintreten auf und lösen Sie sie. Wie bewegt sich die Leiterschleife weiter, sobald sie sich vollständig im Magnetfeld befindet?

Lösung:

Maschenregel: $0 = U_R - U_{ind} = RI(t) + Bdv(t)$

Gesamtkraft: $mg + BdI(t) = m\dot{v}(t)$

Zusammen: $\dot{v}(t) + \frac{B^2d^2}{Rm} v(t) = g$

Analog zu 1b): $v(t) = \frac{gRm}{B^2d^2}\left(1 - \exp\left[-\frac{B^2d^2}{Rm}t\right]\right)$

$$\boxed{x(t) = \frac{gRm}{B^2d^2}t + \frac{gR^2m^2}{B^4d^4}\left(\exp\left[-\frac{B^2d^2}{Rm}t\right] - 1\right)}$$

3. Berechnen Sie die Induktivitäten von
   a) einem Koaxialkabel mit Innenradius $r_i = 1,0\,\text{cm}$, Außenradius $r_a = 5,0\,\text{cm}$, Länge $l = 5,0\,\text{m}$
   b) einer ringförmigen Spule mit quadratischem Querschnitt der Kantenlänge $a = 5,0\,\text{cm}$, einem Mittelradius $R = 20\,\text{cm}$, $N = 500$ Windungen und einem Eisenkern, $\mu_r = 2000$.

a) Lösung:

Amperesches Gesetz: Kreisintegral über Innenleiter

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \qquad \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} r^{-1}$$

Fluss durch Querschnittsfläche zwischen Innen- und Außenleiter:

$$\Phi = l\int_{r_i}^{r_a} B(r)\,dr = l\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{r_i}^{r_a}\frac{dr}{r} = l\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r_a}{r_i}$$

Induktionsspannung: $U_{ind} = -\dot{\Phi} = -l\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{r_a}{r_i}\dot{I}$

$$\Rightarrow \boxed{L = l\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{r_a}{r_i} = 1,6\cdot 10^{-6}\,\text{H}}$$

b) Lösung:

Amperesches Gesetz: Kreisintegral durch die Spule

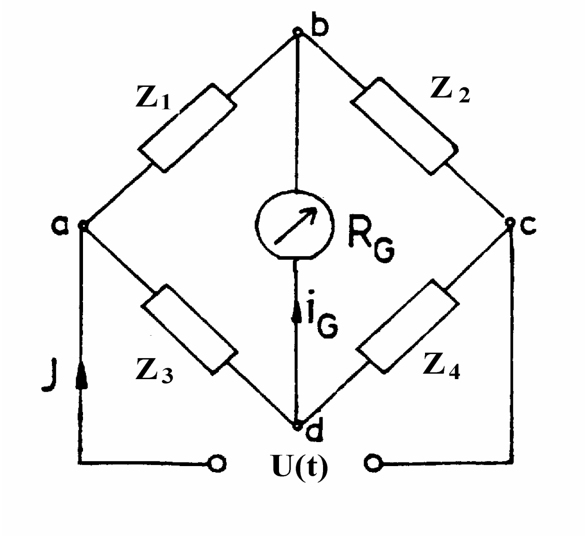
$$2\pi r B(r) = \mu_r \mu_0 N I \qquad \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_r\mu_0}{2\pi} N I r^{-1}$$

Fluss: $\Phi = a\int_{R-a/2}^{R+a/2} B(r)\,dr = a\frac{\mu_r\mu_0}{2\pi}NI\int_{R-a/2}^{R+a/2}\frac{dr}{r} = a\frac{\mu_r\mu_0}{2\pi}NI\ln\frac{R+a/2}{R-a/2}$

Induktionsspannung: $U_{ind} = -N\dot{\Phi} = -a\frac{\mu_r\mu_0}{2\pi}N^2\ln\frac{R+a/2}{R-a/2}\dot{I}$

$$\Rightarrow \boxed{L = a\frac{\mu_r\mu_0}{2\pi}N^2\ln\frac{R+a/2}{R-a/2} = 1,3\,\text{H}}$$

4. Vier Widerstände Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 werden an die vier Kanten eines Quadrates gesetzt. An zwei gegenüberliegende Ecken wird eine Wechselspannung angelegt, die anderen beiden Ecken werden über ein Strommessgerät mit Innenwiderstand R_G verbunden (Wheatstonesche Brückenschaltung). Berechnen Sie die Stromstärke, die von dem Gerät gemessen wird. Welche Bedingung müssen die vier Widerstände erfüllen, damit kein Strom durch die Brücke fließt? Wozu lässt sich diese Schaltung verwenden?



Lösung:

Man hat 4 Knoten, 6 Verbindungen, also 3 unabhängige Variable für die Stromstärken. Wähle folgende drei Ringströme (alle drei im Uhrzeigersinn):

- J_1: Strom von der Spannungsquelle über Z_1 und Z_2
- J_2: Strom von der Spannungsquelle über Z_3 und Z_4
- J_3: Ringstrom durch das Gerät, Z_2 und Z_4

Alle Einzelstromstärken lassen sich durch diese drei Ringströme ausdrücken:

$$I_1 = J_1 \qquad I_2 = J_1 + J_3 \qquad I_3 = J_2 \qquad I_4 = J_2 - J_3 \qquad I_G = J_3$$

Nun wende man die Maschenregel dreimal an:

$$(\text{I.}) \qquad Z_1 J_1 + Z_2 (J_1 + J_3) = U$$

$$(\text{II.}) \qquad Z_3 J_2 + Z_4 (J_2 - J_3) = U$$

$$(\text{III.}) \qquad R_G J_3 + Z_2 (J_3 + J_1) + Z_4 (J_3 - J_2) = 0$$

Oder in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & 0 & Z_2 \\ 0 & Z_3 + Z_4 & -Z_4 \\ Z_2 & -Z_4 & R_G + Z_2 + Z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ U \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch Umformung $(\text{III.}) - \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}(\text{I.}) + \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}(\text{II.})$ erhält man eine Gleichung für J_3

$$\left(R_G + Z_2 + Z_4 - \frac{Z_2^2}{Z_1+Z_2} - \frac{Z_4^2}{Z_3+Z_4}\right) J_3 = U\left(\frac{Z_4}{Z_3+Z_4} - \frac{Z_2}{Z_1+Z_2}\right)$$

$$J_3 = U\frac{Z_1Z_4 - Z_2Z_3}{(R_G + Z_2 + Z_4)(Z_1+Z_2)(Z_3+Z_4) - Z_2^2(Z_3+Z_4) + Z_4^2(Z_1+Z_2)}$$

Die Bedingung $J_3 = I_G = 0$ ist genau dann erfüllt, wenn $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$.

Die Wheatstonesche Brückenschaltung lässt sich zur genauen Messung eines Widerstandes nutzen, indem man einen unbekannten, zwei bekannte und einen regelbaren Widerstand einsetzt. Man ändert den regelbaren Widerstand so lange, bis in der Brücke kein Strom mehr fließt und kann dann den unbekannten Widerstand aus den anderen berechnen.

5. Betrachten Sie folgende vier Schaltungen. Die Eingangsspannung liegt über einer Reihenschaltung von einem ohmschen Widerstand mit einem Kondensator, bzw. mit einer Spule. Die Ausgangsspannung wird entweder über dem ohmschen Widerstand oder über dem Kondensator, bzw. über der Spule gemessen. Betrachten sie den Betrag des Verhältnisses von Ausgangs- zu Eingangsspannung in Abhängigkeit von der Frequenz. Welche dieser Schaltungen eignet sich als Hochpass (hohe Frequenzen werden durchgelassen) und welche als Tiefpass (niedrige Frequenzen werden durchgelassen).

<u>Lösung:</u>

Mit Kondensator:

Gesamtwiderstand: $Z_g = \frac{1}{i\omega C} + R$

Spannung über dem Kondensator: $U_{aus} = \frac{Z_C}{Z_C + R} U_{ein} = \frac{1}{1 + i\omega CR} U_{ein}$

$$\left|\frac{U_{aus}}{U_{ein}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Für $\omega = 0$ ist $U_{aus} = U_{ein}$, für $\omega \to \infty$ ist $U_{aus} = 0$, also Tiefpass.

Spannung über dem Ohmschen Widerstand: $U_{aus} = \frac{R}{Z_C + R} U_{ein} = \frac{1}{1 + \frac{1}{i\omega RC}} U_{ein}$

$$\left|\frac{U_{aus}}{U_{ein}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}}}$$

Für $\omega = 0$ ist $U_{aus} = 0$, für $\omega \to \infty$ ist $U_{aus} = U_{ein}$, also Hochpass.

Mit Spule:
Gesamtwiderstand: $Z_g = i\omega L + R$

Spannung über der Spule: $U_{aus} = \frac{i\omega L}{i\omega L + R} U_{ein} = \frac{1}{1 + \frac{R}{i\omega L}} U_{ein}$

$$\left|\frac{U_{aus}}{U_{ein}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}}}$$

Für $\omega = 0$ ist $U_{aus} = 0$, für $\omega \to \infty$ ist $U_{aus} = U_{ein}$, also Hochpass.

Spannung über dem Ohmschen Widerstand: $U_{aus} = \frac{R}{Z_L + R} U_{ein} = \frac{1}{1 + i\frac{\omega L}{R}} U_{ein}$

$$\left|\frac{U_{aus}}{U_{ein}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}}}$$

Für $\omega = 0$ ist $U_{aus} = U_{ein}$, für $\omega \to \infty$ ist $U_{aus} = 0$, also Tiefpass.

6. Ein geladener Kondensator mit kreisförmigen Platten (Ladung Q_0, Plattenradius r_P, Plattenabstand d) werde über einen Ohmschen Widerstand entladen.
   a) Berechnen Sie die Stromstärke im Stromkreis
   b) Berechnen Sie das elektrische Feld im Kondensator, die Verschiebungsstromstärke, und das dadurch erzeugte magnetische Feld.
   c) Berechnen Sie den Betrag des Poynting-Vektors. In welche Richtung zeigt er? Zeigen Sie, dass der Fluss des Poynting-Vektors aus dem Kondensator heraus gleich der elektrischen Leistung im Ohmschen Widerstand ist. (Der Raum außerhalb des Kondensators soll als feldfrei angenommen werden)

Lösung:

a) Kapazität: $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = \varepsilon_0 \frac{r_p^2 \pi}{d}$

Differentialgleichung: $\frac{Q(t)}{C} + R\dot{Q}(t) = 0$

$$\dot{Q}(t) = -\frac{1}{RC} Q(t)$$

Lösung: $Q(t) = Q_0 \exp\left[-\frac{t}{RC}\right]$

$$I(t) = \dot{Q}(t) = -\frac{Q_0}{RC} \exp\left[-\frac{t}{RC}\right]$$

b) elektrische Feldstärke: $E(t)=\frac{U_C(t)}{d}=\frac{Q(t)}{Cd}=\frac{Q_0}{Cd}\exp\left[-\frac{t}{RC}\right]$

Verschiebungsstromstärke:

$$I_v(t)=\varepsilon_0 A\dot{E}=-\frac{\varepsilon_0 A}{d}\frac{Q_0}{RC^2}\exp\left[-\frac{t}{RC}\right]=-\frac{Q_0}{RC}\exp\left[-\frac{t}{RC}\right]=I(t)$$

Verschiebungsstromdichte: $j_v=\frac{I_v}{A}=\frac{I_v}{r_P^2\pi}$

Um das Magnetfeld zu berechnen, integriere man entlang einer Kreislinie um die Mittelpunktsachse des Kondensators:

$$2r\pi B(r)=\mu_0 j_v r^2\pi \qquad \Rightarrow B(r,t)=\frac{\mu_0 r}{2}j_v(t)=-\frac{\mu_0 Q_0 r}{2RCA}\exp\left[-\frac{t}{RC}\right]$$

c) Poynting-Vektor: $S(r,t)=\frac{E(t)B(r,t)}{\mu_0}=\frac{Q_0^2 r}{2RC^2Ad}\exp\left[-\frac{2t}{RC}\right]$

Sei die linke Platte positiv geladen. Dann zeigt $\vec{E}$ nach rechts. Da $\vec{B}$ negatives Vorzeichen hat, läuft es im mathematisch negativen Sinn um $\vec{E}$, d.h. wenn man in Richtung von $\vec{E}$ schaut im Gegenuhrzeigersinn. Das Kreuzprodukt von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ und damit die Richtung von $\vec{S}$ zeigt also von der Kondensatorachse weg. Es fließt also Energie aus dem Kondensator hinaus, und zwar nicht durch die Kondensatorplatten, sondern durch die Mantelfläche.

Dieser Fluss beträgt: $S(r_P,t)2r_P\pi d=\frac{Q_0^2}{RC^2}\exp\left[-\frac{2t}{RC}\right]$

Die Leistung im Ohmschen Widerstand beträgt: $P(t)=RI^2(t)=\frac{Q_0^2}{RC^2}\exp\left[-\frac{2t}{RC}\right]$

Die Energie, die dem elektrischen und magnetischen Feld also durch das Entladen des Kondensators verloren geht, wird im Ohmschen Widerstand in Wärme umgesetzt.

7. Betrachten Sie einen mit dem Ohmschen Widerstand R belasteten Transformator, bei dem der Ohmsche Widerstand in den Spulen nicht vernachlässigt werden kann. Die beiden Spulen haben gleiche Querschnittsfläche und gleiche Länge. Wie sieht nun das Verhältnis der Spannungen aus?

Lösung:

Man erhält analog zur Rechnung im Skript folgendes Gleichungssystem:

$$U_1=i\omega L_1 I_1+i\omega L_{12}I_2+R_1 I_1 \qquad \Rightarrow I_1=\frac{U_1}{i\omega L_1+R_1}-\frac{i\omega L_{12}}{i\omega L_1+R_1}I_2$$

$$0=i\omega L_{21}I_1+i\omega L_2 I_2+(R_2+R)I_2 \qquad \Rightarrow -\frac{i\omega L_{21}}{i\omega L_1+R_1}U_1=\left(\frac{\omega^2 L_{12}L_{21}}{i\omega L_1+R_1}+i\omega L_2+R_2+R\right)I_2$$

Durch weiteres Umformen gelangt man zu folgendem Ergebnis:

$$I_2 = -\frac{i\omega L_{21}}{i\omega L_2 R_1 + (R_2 + R)(i\omega L_1 + R_1)} U_1$$

$$I_2 = -\frac{i\omega L_{21}}{R_1 (R_2 + R) + i\omega\big(L_2 R_1 + L_1 (R_2 + R)\big)} U_1$$

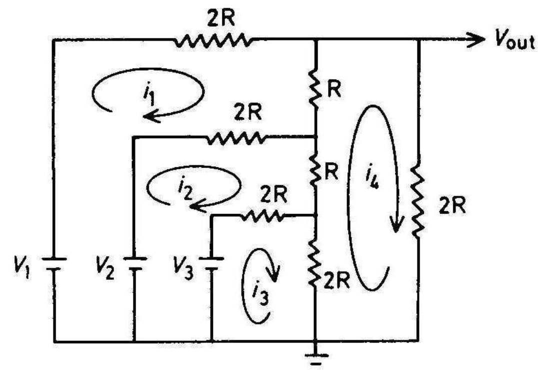
$$U_2 = RI_2 = -\frac{R}{\frac{N_2}{N_1} R_1 + \frac{N_1}{N_2}(R_2 + R) - i\frac{R_1 (R_2 + R) l}{\omega\mu_r\mu_0 A N_1 N_2}} U_1$$

$$\left|\frac{U_2}{U_1}\right| = \frac{R}{\sqrt{\left(\frac{N_2}{N_1} R_1 + \frac{N_1}{N_2}(R_2 + R)\right)^2 + \left(\frac{R_1 (R_2 + R) l}{\omega\mu_r\mu_0 A N_1 N_2}\right)^2}}$$

Für hohe Frequenzen:

$$\left|\frac{U_2}{U_1}\right| \approx \frac{R}{\frac{N_2^2}{N_1^2} R_1 + R_2 + R} \frac{N_2}{N_1}$$

8. (Aus der Semestrale SS07) Gegeben sei folgende Schaltung:



a) Geben Sie für das unten gezeigte Widerstandsnetzwerk die Ausgangsspannung V_{out} als Funktion von den Eingangsspannungen V_1, V_2, V_3 und R an.

b) Nehmen Sie dann an, dass V_1, V_2, V_3 jeweils entweder die Spannung 0 oder 1V (gegenüber dem Erdpotential) annehmen können. Berechnen Sie die Ausgangsspannung für jede der 8 Kombinationen.

c) Wozu könnte dieses Netzwerk dienen?

<u>Lösung:</u>

a) 4 mal Maschenregel:

$$(\text{I.})\qquad V_1 - V_2 = 2Rj_1 + R\left(j_1 - j_4\right) + 2R\left(j_1 - j_2\right)$$
$$(\text{II.})\qquad V_2 - V_3 = 2R\left(j_2 - j_1\right) + R\left(j_2 - j_4\right) + 2R\left(j_2 - j_3\right)$$
$$(\text{III.})\qquad V_3 = 2R\left(j_3 - j_2\right) + 2R\left(j_3 - j_4\right)$$
$$(\text{IV.})\qquad 0 = 2Rj_4 + 2R\left(j_4 - j_3\right) + R\left(j_4 - j_2\right) + R\left(j_4 - j_1\right)$$

In Matrixschreibweise:

$$R\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 - V_2 \\ V_2 - V_3 \\ V_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zum Lösen wende man den Gauß-Algorithmus an, wobei man aufhören kann, wenn j_4 bestimmt ist.

1.Schritt:
$$(\text{II.}') = 5(\text{II.}) + 2(\text{I.}) \qquad (\text{I.}') = (\text{I.})$$
$$(\text{IV.}') = 5(\text{IV.}) + (\text{I.}) \qquad (\text{III.}') = (\text{III.})$$

Ergebnis:
$$R\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 21 & -10 & -7 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & -7 & -10 & 29 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 - V_2 \\ 2V_1 + 3V_2 - 5V_3 \\ V_3 \\ V_1 - V_2 \end{pmatrix}$$

2.Schritt:
$$(\text{III.}'') = 21(\text{III.}') + 2(\text{II.}') \qquad (\text{I.}'') = (\text{I.}')$$
$$(\text{IV.}'') = 3(\text{IV.}') + (\text{II.}') \qquad (\text{II.}'') = (\text{II.}')$$

Ergebnis:
$$R\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 21 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 64 & -56 \\ 0 & 0 & -40 & 80 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 - V_2 \\ 2V_1 + 3V_2 - 5V_3 \\ 4V_1 + 6V_2 + 11V_3 \\ 5V_1 - 5V_3 \end{pmatrix}$$

3.Schritt:
$$(\text{III.}''') = (\text{III.}'') \qquad (\text{I.}''') = (\text{I.}'')$$
$$(\text{IV.}''') = 1{,}6(\text{IV.}'') + (\text{III.}'') \qquad (\text{II.}''') = (\text{II.}'')$$

Ergebnis:
$$R\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 21 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 64 & -56 \\ 0 & 0 & 0 & 72 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 - V_2 \\ 2V_1 + 3V_2 - 5V_3 \\ 4V_1 + 6V_2 + 11V_3 \\ 12V_1 + 6V_2 + 3V_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow j_4 = \frac{V_1}{6R} + \frac{V_2}{12R} + \frac{V_3}{24R} \qquad \Rightarrow V_{out} = 2Rj_4 = \frac{V_1}{3} + \frac{V_2}{6} + \frac{V_3}{12}$$

b) $V_{out}(V_1, V_2, V_3) = \frac{V_1}{3} + \frac{V_2}{6} + \frac{V_3}{12}$

$V_{out}(0,0,0) = 0$ $\quad V_{out}(0,0,1) = \frac{1}{12}$ $\quad V_{out}(0,1,0) = \frac{2}{12}$ $\quad V_{out}(0,1,1) = \frac{3}{12}$

$V_{out}(1,0,0) = \frac{4}{12}$ $\quad V_{out}(1,0,1) = \frac{5}{12}$ $\quad V_{out}(1,1,0) = \frac{6}{12}$ $\quad V_{out}(1,1,1) = \frac{7}{12}$

c) Versteht man das Tripel (V_1, V_2, V_3) als Binärzahl, so ist das Ergebnis jeweils proportional zu dieser Zahl. Diese Schaltung kann also zur Umwandlung eines digitalen Signals in ein analoges dienen.

9. An eine sinusförmige Eingangsspannung werden in Serie ein Schwingkreis (Kapazität C, Induktivität L, Ohmscher Widerstand vernachlässigbar) und ein Ohmscher Widerstand R angeschlossen, über dem dann das Ausgangssignal gemessen wird. Berechnen Sie das Verhältnis von Eingangs- zu Ausgangsamplitude in Abhängigkeit von der Frequenz ω. Wozu könnte diese Schaltung dienen? Was wäre, wenn man das Ausgangssignal über dem Schwingkreis abgreifen würde?

Lösung:

$$\frac{U_{aus}}{U_{ein}} = \frac{R}{Z_{ges}} = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{i\omega L}}}$$

$$\frac{U_{aus}}{U_{ein}} = \frac{R}{R + \frac{i\omega L}{1-\omega^2 LC}} = \frac{1}{1 + \frac{i\omega L}{R\left(1-\omega^2 LC\right)}}$$

$$\left|\frac{U_{aus}}{U_{ein}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2}}}$$

Für $\omega = 0$ und für $\omega \to \infty$ ist $U_{aus} = U_{ein}$. Für $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ist $U_{aus} = 0$. Diese Schaltung kann man also verwenden um eine bestimmte Frequenz aus einem Signal zu entfernen.
Würde man das Ausgangssignal über dem Schwingkreis abgreifen, so erhielte man:

$$\left|\frac{U_{aus}}{U_{ein}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

Diese Anordnung hätte genau das umgekehrte Verhalten und würde nur eine bestimmte Frequenz des Eingangssignals durchlassen.

10. Betrachten Sie eine torusförmige Spule mit N Windungen. Senkrecht durch deren Mittelpunkt verlaufe ein gerader, stromführender Draht. Der Querschnitt der Spule sei quadratisch, wobei eine Diagonale parallel, die andere senkrecht zum Draht verläuft. Der Abstand vom Draht zum Mittelpunkt dieses Quadrats sei R, der Abstand vom Mittelpunkt zu den Ecken sei d. Berechnen Sie die Spannung an den Enden der Spule, die durch den Strom I im Draht induziert wird.

Lösung:

Magnetfeld des Drahtes: $B(r) = \frac{\mu_r \mu_0 I}{2\pi\, r}$

Fluss durch die Spule: $\Phi = \int B(r)\, dA = \frac{\mu_r \mu_0 I}{2\pi} \int\limits_{R-d}^{R+d} \frac{2z(r)}{r} dr$

$$\Phi = \frac{\mu_r \mu_0 I}{\pi} \left(\int\limits_{R-d}^{R} \frac{r - R + d}{r} dr + \int\limits_{R}^{R+d} \frac{R + d - r}{r} dr \right)$$

$$\Phi = \frac{\mu_r \mu_0 I}{\pi} \left(\Big[r + (d - R) \ln r \Big]_{R-d}^{R} + \Big[(d + R) \ln r - r \Big]_{R}^{R+d} \right)$$

$$\Phi = \frac{\mu_r \mu_0 I}{\pi} \left(d + (d - R) \ln \frac{R}{R - d} + (d + R) \ln \frac{R + d}{R} - d \right)$$

$$\Phi = \frac{\mu_r \mu_0 I}{\pi} \left(d \ln \frac{R + d}{R - d} + R \ln \frac{R^2 - d^2}{R^2} \right)$$

Induzierte Spannung: $U_{ind} = -N\dot{\Phi} = -\frac{\mu_r \mu_0 N}{\pi} \left(d \ln \frac{R + d}{R - d} + R \ln \frac{R^2 - d^2}{R^2} \right) \dot{I}$

11. Ein Hohlzylinder sei koaxial innerhalb einer Spule der Länge l mit N Windungen platziert. Durch die Spule fließe ein sinusförmiger Wechselstrom $I_{Sp}(t) = I_0 \sin \omega t$. Der Zylinder habe die Höhe h, den Radius R und die Wanddicke d, wobei $d \ll R$ gelten soll. Das Zylindermaterial habe die elektrische Leitfähigkeit σ_{el} und die magnetische Permeabilität μ_r. Berechnen Sie mit Hilfe der 3. Maxwellgleichung und des mikroskopischen Ohmschen Gesetzes die Stromdichte, und daraus die Stromstärke im Zylinder. Welchen Ohmschen Widerstand hat der Zylinder? Berechnen Sie nun die im Zylinder induzierte Leistung. (Vernachlässigen Sie bei der Rechnung Rückkopplungs- oder Selbstinduktionseffekte).

Lösung:

Magnetfeld der Spule: $H_{SP}(t) = \frac{N}{l} I_{Sp}(t)$

3. Maxwell Gleichung: $-\oint E dr = \int \dot{B} dA$

Mikroskopisches Ohmsches Gesetz: $j = \sigma_{el} E$

$$-2\pi R\frac{j_Z(t)}{\sigma_{el}}=\frac{\mu_0 N}{l}\dot{I}_{Sp}(t)(R-d)^2\pi+\frac{\mu_r\mu_0 N}{l}\dot{I}_{Sp}(t)2\pi Rd$$

Stromdichte im Zylinder: $j_Z(t)=-\frac{\mu_0\left(R+(\mu_r-1)d\right)N}{2l}\sigma_{el}I_0\omega\cos\omega t$

Stromstärke im Zylinder: $I_Z(t)=j_Z(t)hd=-\frac{\mu_0\left(R+(\mu_r-1)d\right)N}{2l}hd\sigma_{el}I_0\omega\cos\omega t$

Widerstand: $R_Z=\frac{2\pi R}{\sigma_{el}hd}$

Leistung: $P_Z(t)=R_Z I_Z^2(t)=\frac{\mu_0^2\left(R+(\mu_r-1)d\right)^2 N^2R\pi}{2l^2}hd\sigma_{el}I_0^2\omega^2\cos^2\omega t$

Mittlere Leistung: $\overline{P_Z}=\frac{\mu_0^2\left(R+(\mu_r-1)d\right)^2 N^2R\pi}{4l^2}hd\sigma_{el}I_0^2$

12. Betrachten Sie zwei kapazitiv gekoppelte, identische, ungedämpfte Schwingkreise. Berechnen Sie die Eigenfrequenzen dieses Systems und vergleichen Sie sie mit der Frequenz eines einzelnen Schwingkreises.

<u>Lösung:</u>

Gleichungen:
$$\left(i\omega L+\frac{1}{i\omega C}\right)I_1+\frac{1}{i\omega C_K}I_2=0$$
$$\frac{1}{i\omega C_K}I_1+\left(i\omega L+\frac{1}{i\omega C}\right)I_2=0$$

Koeffizientendeterminante: $\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2-\frac{1}{\omega^2C_K^2}=0$

$$\omega^4-\frac{2}{LC}\omega^2+\frac{1}{L^2C^2}-\frac{1}{L^2C_K^2}=0$$

$$\left(\omega^2-\frac{1}{LC}\right)^2=\frac{1}{L^2C_K^2}$$

$$\omega^2=\frac{1}{L}\left(\frac{1}{C}\pm\frac{1}{C_K}\right)$$

$$\omega=\pm\sqrt{\frac{C_K\pm C}{LCC_K}}=\pm\omega_0\sqrt{\left(1\pm\frac{C}{C_K}\right)}$$

Wenn C zu groß ist, wird ein ω imaginär, was einem exponentiellen Abfall entspricht. Die allgemeine Lösung ergibt sich aus Superposition der beiden Eigenschwingungen.