Repetitorium zu

Experimentalphysik 2

Ferienkurs am Physik-Department der Technischen Universität München

Gerd Meisl

5. August 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Lösungsskizzen

1.1 Lösungsskizzen der Übungsaufgaben

Aufgabe 1 (Binnendruck und Kovolumen) *Für CO_2 (M = 44 g/mol) ist die kritische Temperatur T_k = 304,2K und der kritische Druck $p_k = 7,6 \cdot 10^6$ Pa, seine Dichte am kritischen Punkt ρ_k= 46 kg/m^3. Berechnen Sie den Binnendruck und das Eigenvolumen und vergleichen Sie die Werte mit dem Druck und Volumen bei Normalbedingungen (p=$10^5 Pa, T = 273K$)!*

Lösung

Aus M =ρV folgt für das kritische Molvolumen:

$$V_k = \frac{0,044kg}{\rho_k} = \frac{0,044}{46} = 9,56 \cdot 10^{-4} m^3 = 0,956l.$$

Das Molvolumen ist also von 22,4 l bei Normalbedingungen eines idealen Gases auf 0,956 l zusammengedruckt. Aus der allgemeinen Gasgleichung eines idealen Gases würde man

$$V_k = \frac{RT_k}{p_k} = 0,33 \cdot 10^{-3} m^3$$

erhalten. Man sieht daraus, dass Eigenvolumen und Binnendruck des realen Gases beim kritischen Punkt eine erhebliche Abweichung vom idealen Gas verursachen.

$$b = \frac{1}{3} V_k \rightarrow b = 0,32 \cdot 10^{-3} m^3 \qquad a = 3 p_k V_k^2 \rightarrow a = 20,8 N m^4.$$

Unter Normalbedingungen (p = 1bar, T = 273 K, Volumen aus idealer Gasgleichung) beträgt der Binnendruck dann für 1 mol:

$$\frac{a}{V^2} = \frac{a}{0,0224^2\ m^6} = 4,1 \cdot 10^4 N/m^2 \widehat{=} 41\%\ des\ Normaldruckes!$$

Die relative Korrektur des Volumens ist $b/V = \frac{0{,}32 \cdot 10^{-3}}{22{,}4 \cdot 10^{-3}} = 1,4\%$.

Aufgabe 2 (reales Gas) *1. 9 g Helium (Molmasse 4 g/mol) besitzen bei 101 kPa ein Volumen von 10l. Welche Temperatur hat das Gas, wenn sie die Gleichung für ein reales Gas mit a= $3,45 \frac{l^2\ kPa}{mol^2}$ und $b = 0,0237 \frac{l}{mol}$ verwenden. Das Gas wird jetzt aufgeheizt, bis das Volumen 20* *l beträgt, berechnen Sie die Endtemperatur. Schließlich wird das Gas bei konstantem Volumen auf 350K erwärmt, wie groß ist jetzt der Druck?*

2. *Berechnen Sie P_2 für ein ideales Gas und für Wasser ($a = 551\frac{l^2\ kPa}{mol^2}$ und $b = 0,0305\frac{l}{mol}$) und vergleichen sie die Ergebnisse.*

Lösung

1.

$$T_0 = \frac{(101kPa + 3,45\frac{l^2 kPa}{mol^2}\frac{2{,}25^2\ mol^2}{10^2\ l^2})(\frac{10l}{2{,}25mol} - 0,0237l/mol)}{R} = 53,8K$$

$$T_1 = 107,7K$$

$$P_2 = \frac{RT}{V_{mol} - b} - \frac{a}{V_{mol}^2} = \frac{R\ 350K}{\frac{20l}{2{,}25mol} - 0,0305\frac{l}{mol}} - \frac{3,45\frac{l^2\ kPa}{mol^2}}{\frac{20^2 l^2}{2{,}25^2 mol^2}} = 328kPa$$

2. *Um die Werte vergleichen zu können muss für jeden Stoff die gleiche Molzahl genommen werden.*

$$P_{2,ideal} = \frac{n\ R\ T}{V} = 327kPa$$

$$\frac{P_2 - P_{2,ideal}}{P_2} = 0,3\%$$

$$P_{2,H_2O} = 322kPa \qquad \frac{P_2 - P_{2,H_2O}}{P_2} = 1,6\%$$

Aufgabe 3 (homogen geladene Kugel) *Berechnen sie das elektrische Felder einer homogen geladenen Kugel mit Radius R und*

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}R^3} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Lösung

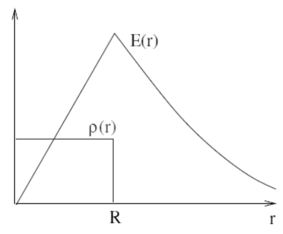
Wir verwenden den Gauß'schen Satz für eine Kugel mit Radius r

$$\oint \vec{E}\ d\vec{A} = 4\pi r^2\ E(r)$$

$$\iiint div\vec{E}\ dV = \iiint \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{Qr^3}{\epsilon_0 R^3} & r < R \\ \frac{Q}{\epsilon_0} & r > R \end{cases}$$

zusammen

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q\ r}{4\pi\epsilon_0 R^3} & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\ r^2} & R < r \end{cases}$$



Aufgabe 4 (Potential und elektrisches Feld) *Berechnen Sie das Potential und daraus, durch Berechnung des Gradienten, das Elektrische Feld am Ursprung für ein Teilchen mit -e bei* $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *und ein Teilchen mit 3e bei* $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*! Welche Arbeit muss man Aufwenden umd die Ladungen zu trennen?*

Lösung

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-e}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \qquad \Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3e}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}$$

$$\Phi_{ges} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}} + \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}\right)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi_{ges} = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{((x-2)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{-3}{(x^2+y^2+(z-1)^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\vec{E}(\vec{0}) = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{(4)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-3}{1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$W = \int_{P_0}^{\infty} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \int_{r_0}^{\infty} q_1 \cdot E_2(r_{12})dr_{12} = \int_{\sqrt{5}}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-3e^2}{r_{12}^2}dr_{12} = 0 - \frac{3e^2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{5}} = q_1\Phi_2(r_0)$$

Aufgabe 5 (elektrischer Fluss) *Berechnen Sie explizit den Elektrischen Fluss durch eine Kugel mit ein Ladung Q im Mittelpunkt.*

Lösung

$$\Phi_{el} = \iint\limits_O \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \int\limits_0^{\pi} d\theta\, r \sin(\theta) \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, r\, \vec{n} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \int\limits_0^{\pi} d\theta \sin(\theta) \int\limits_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\Phi_{el} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \left[-\cos(\theta)\right]_0^{\pi} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Aufgabe 6 (Kugelfelder) *Gegeben sei eine geladene Kugel mit Radius a. Berechnen und skizzieren Sie die elektrischen Felder und Potentiale sowohl innerhalb als auch außerhalb der Kugel für den Fall*

a) einer leitenden Kugel.

b) einer Kugel mit sphärischer Ladungsverteilung, mit $\varrho \propto r^n, n > -3$ variiert. Skizzieren Sie die Fälle n = -2 und n = +2.

Lösung

Kugelsymmetrie von $\varrho(r) \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r = E(r)\frac{\vec{r}}{r}$ Wähle Kugelvolumen mit Radius r für Satz von Gauß:

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \varrho(r) d^3 r = \frac{Q_{eing}}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{Q_{eing}(r)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

a) Leitende Kugel mit Gesamtladung Q:

$$Q_{eing}(r) = \begin{cases} Q & r > a \\ 0 & r < a \end{cases} \vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r} & r > a \\ 0 & r < a \end{cases}$$

Potential: Integration von r'=r bis r'=∞ mit $\phi(\infty) = 0$:

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad f\ddot{u}r \;\; r > a$$

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad f\ddot{u}r \;\; r \leq a$$

b)

$$\varrho(\vec{r}) = C r^n \qquad Q_{eing}(r) = \frac{4\pi C r^{n+3}}{n+3}$$

$$Q_{eing}(r = a) \stackrel{!}{=} Q \rightarrow C = \frac{Q(n+3)}{4\pi a^{n+3}}$$

$$\vec{E}_{innen}(\vec{r}) = \frac{Qr^n}{4\pi\epsilon_0 a^{n+3}}\vec{r} \quad , \quad \vec{E}_a(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r}$$

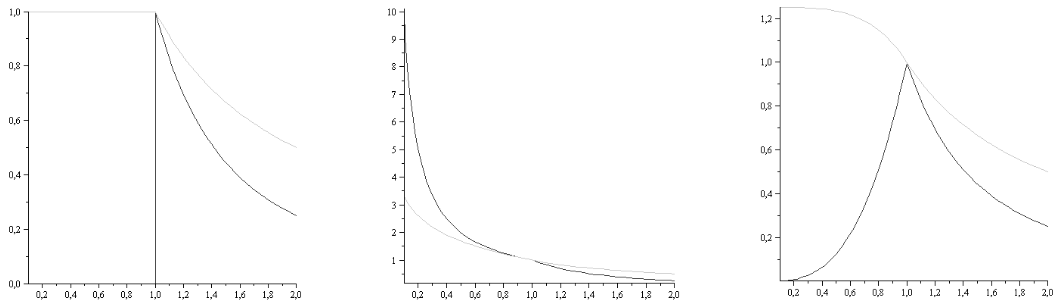
Potential, $r \neq -2$:

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad f\ddot{u}r \;\; r > a$$

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^{n+3}}\frac{a^{n+2} - r^{n+2}}{n+2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad f\ddot{u}r \;\; r < a$$

r=-2:

$$\vec{E}_{innen}(\vec{r}) = \frac{Qr^{-2}}{4\pi\epsilon_0 a}\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a\ r}\vec{e}_r \quad \rightarrow \quad \Phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}(1 + \ln(\frac{a}{r})) & r < a \end{cases}$$



Aufgabe 7 (Wassermolekül im homogenen elektrischen Feld) *Das Sauerstoffatom eines Wassermoleküls befinde sich im Ursprung. Eines der beiden Wasserstoffatome liegt bei $x_1 = 0,077nm,\ y_1 = 0,058nm$ und das andere bei $x_2 = -0,077nm,\ y_2 = 0,058nm$.*

a) *Berechnen sie das Dipolmoment des H_2O-Moleküls unter der Annahme, dass die H-Atome ihre Elektronen ganz an das O-Atom abgeben.*

b) *Der Wasserdipol befindet sich nun in einem homogenen elektrischen Feld der Stärke $4 \cdot 10^4 V/m$. Welchen Betrag hat das Drehmoment auf den Dipol, wenn er parallel, senkrecht oder in einem Winkel von 30° zum E-Feld liegt?*

c) *Berechnen Sie für die drei Fälle von b) jeweils die potenzielle Energie des Dipols.*

Lösung

a)

$$\vec{p} = \sum \vec{r}_i\ q_i = \vec{0}(-2e) + e\left[(x_1 + x_2)\vec{e}_x + (y_1 + y_2)\vec{e}_y\right] = e2y_1\vec{e}_y = 1,9 \cdot 10^{-29}Cm$$

b)

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{p} \times \vec{E}\right| = pE\sin(\theta)$$

$$M = \begin{cases} 0 & \vec{p}\,||\,\vec{E} / \sin(\theta) = 0 \\ pE = 2,4 \cdot 10^{-25} Nm & \vec{p} \perp \vec{E} / \sin(\theta) = 1 \\ pE \sin(30°) = 1,2 \cdot 10^{-25} Nm & \sin(\theta) = \sin(30°) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

c)

$$E_{pot} = -\vec{p} \cdot \vec{E} = \begin{cases} -2,4 \cdot 10^{-25} J & \vec{p}\,||\,\vec{E} / \cos(\theta) = 1 \\ 0 & \vec{p} \perp \vec{E} / \cos(\theta) = 0 \\ -pE \cos(30°) = -2,08 \cdot 10^{-25} J & \cos(\theta) = \cos(30°) \end{cases}$$

Aufgabe 8 (Plattenkondensator) *Ein Plattenkondensator ohne Dielektrikum hat eine Fläche $A = 600cm^2$. Die Platten haben einen Abstand $d_1 = 3mm$ und sind zunächst mit den Polen einer Spannungsquelle mit $U_1 = 300V$ verbunden.*

a) Berechnen Sie die Kapazität C_1 des Kondensators, seine Ladung Q_1, elektrische Feldstärke E_1, Feldenergie W_1 und die Kraft F_1, mit der sich die Platten anziehen.

b) Nun wird bei angeschlossener Spannungsquelle der Plattenabstand auf $d_2 = 10mm$ erhöht. Wie groß sind jetzt $U_2, C_2, Q_2, E_2, W_2, F_2$?

c) Vom Zustand in a) ausgehend wird diesmal die Verbindung zur Spannungsquelle unterbrochen und erst dann der Abstand auf $d_3 = 10mm$ vergrößert. Wie groß sind jetzt U_3, C_3, Q_3, E_3, W_3 und F_3?

d) Vom Zustand a) ausgehend wird nach Trennung von der Spannungsquelle ein Dielektrikum ($\epsilon_r = 8$) eingefügt. Berechnen Sie U_4, C_4, Q_4, E_4, W_4 und F_4!

Lösung

a)

$$C_1 = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 A}{d_1} = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \frac{600 \cdot 10^{-4} m^2}{3 \cdot 10^{-3} m} = 177pF$$

$$Q_1 = C_1 U_1 = 53 \cdot 10^{-9} C$$

$$E_1 = \frac{U_1}{d_1} = \frac{300V}{3 \cdot 10^{-2} m} = 100 \frac{kV}{m}$$

$$W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2} = 7,97 \cdot 10^{-6} J$$

$$F_1 = \frac{E_1}{2} Q_1 = 2,65 \cdot 10^{-3} N \text{ und anziehend}$$

b)

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{d_2} = C_1 \frac{d_1}{d_2} = 53pF < C_1$$

$$Q_2 = C_2 U_2 = Q_1 \frac{d_1}{d_2} = 15,9 \cdot 10^{-9} C < Q_1$$

$$U_2 = U_1 = 300V$$
$$E_2 = \frac{U_2}{d_2} = E_1 \frac{d_1}{d_2} = 30 \frac{kV}{m} < E_1$$
$$W_2 = \frac{C_2 U_2^2}{2} = W_1 \frac{d_1}{d_2} 2,39 \cdot 10^{-6} J$$
$$F_2 = \frac{E_2}{2} Q_2 = F_1 (\frac{d_1}{d_2})^2 = 0,24 \cdot 10^{-3} N < F_1$$

c)

$$d_3 = d_2$$
$$C_3 = C_2 = 53pF$$
$$Q_3 = Q_1 = 53 \cdot 10^{-9} C$$
$$U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q_1 d_2}{C_1 d_1} = U_1 \frac{d_2}{d_1} = 1kV > U_1$$
$$E_3 = \frac{U_3}{d_3} = \frac{U_1}{d_1} = E_1$$
$$W_3 = \frac{C_3 U_3^2}{2} = \frac{C_1}{2} \frac{d_1}{d_2} U_1^2 (\frac{d_2}{d_1})^2 = W_1 \frac{d_2}{d_1} = 26 \cdot 10^{-6} J > W_1$$
$$F_3 = \frac{E_3}{2} Q_3 = F_1$$

d)

$$C_4 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d_1} = \epsilon_r C_1 = 1,42nF > C_1$$
$$Q_4 = Q_1 = 53 \cdot 10^{-9} C$$
$$U_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{Q_1}{C_1 \epsilon_r} = \frac{U_1}{\epsilon_r} = 37,5V < U_1$$
$$E_4 = \frac{U_4}{d_4} = \frac{E_1}{\epsilon_r} = 12,5 \frac{kV}{m} < E_1$$
$$W_4 = \frac{C_4 U_4^2}{2} = \frac{Q_4^2}{2C_4} = \frac{W_1}{\epsilon_r} = 0,996 \cdot 10^{-6} J < W_1$$
$$F_4 = \frac{E_4}{2} Q_4 = \frac{F_1}{\epsilon_r} = 0,333 \cdot 10^{-3} N < F_1$$

Aufgabe 9 (Kapazität Zylinderkondensator) *Berechnen Sie die Kapazität von 2 konzentrischen, dünnen, leitenden Zylinderflächen der Länge L mit Radien a, b, wobei gilt L » b > a.*

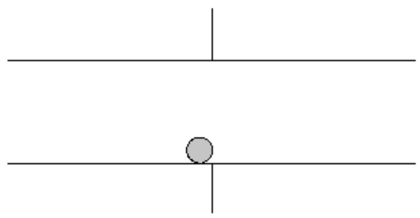
Lösung

E-Feld durch Gaußschen Satz:

$$\vec{E}(\rho) = -\frac{Q}{\epsilon_0 2\pi\rho L}\vec{e}_\rho \quad \rightarrow \quad U = \int_a^b \vec{E}(\rho)\cdot\vec{e}_\rho d\rho = \frac{-Q}{\epsilon_0 2\pi L}\ln(b/a)$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{ln(b/a)}$$

Aufgabe 10 (Ping-Pong) *Eine Kugel der Masse 1 g und Durchmesser 2 cm mit einem Metallüberzug liegt wie in der Abbildung zu sehen in einem Kondensator (A = 60 cm^2, d= 4 cm). Welche Spannung muss angelegt werden, damit sich die Kugel vom Boden löst? Wie lange braucht sie bei einer Spannung von 25 kV bis zur oberen Platte? Welche Ladung ist dann auf der Kugel und wie viele Elektronen sind das? Berechnen Sie die Ladung auf der Kugel mit Hilfe der Kapazität eines Kugelkondensators und nehmen sie eine homogene Verteilung der Ladung auf Kugel und Platten an.*



Lösung

Zuerst benötigen wir die Ladung auf der Kugel und, mit $C = 4\pi\epsilon_0 R$ (siehe Vorlesung, 19.05.08) und das elektrische Feld im Plattenkondensator:

$$Q_{Kugel} = 4\pi\epsilon_0 R\, U \qquad E_{Platte} = \frac{U}{d}$$

Damit die Kugel sich vom Boden löst muss die elektrische Kraft stärker sein als die Gravitation:

$$m\ g < Q_K\ E \qquad \rightarrow \qquad U > \sqrt{\frac{m\ g\ d}{4\pi\epsilon_0 R}} = 19kV$$

Als nächstes berechnen wir die Nettoraft auf die Kugel bei 25 kV:

$$F_{ges} = F_E - F_G = 4\pi\epsilon_0\frac{R}{d}U^2 - m\ g = 0,0174N - 0,00981 = 7,6mN$$

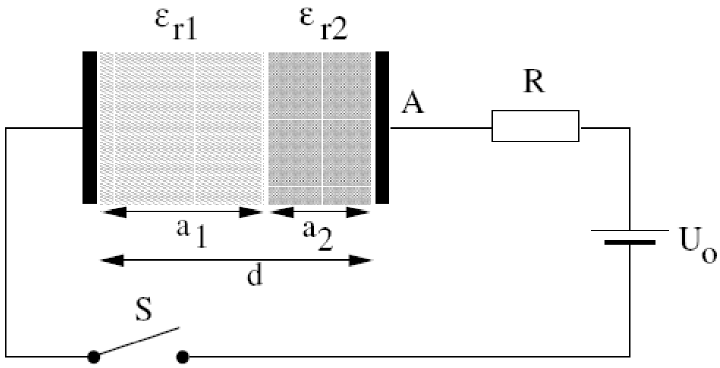
und daraus die Zeit für 2 cm:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{F/m}} = 0,073s$$

Die Ladung und damit die Elektronenzahl erhalten wir aus der ersten Formel:

$$Q_K = 2,8 \cdot 10^{-8} C \rightarrow n_e = \frac{Q_K}{e} = 1,7 \cdot 10^{11}$$

Aufgabe 11 (Kondensator mit Dielektrika) *Zwischen den Platten eines Plattenkondensators sind zwei 2 Schichten verschiedener Dielektrika mit der Dicke $a_1 = 0,1$ mm und $a_2 = 0,05$ mm mit den Dielektrizitätszahlen $\epsilon_{r1} = 2$ bzw $\epsilon_{r2} = 6$. Die Kondensatorfläche ist A = 10 cm^2 und der Abstand d=0,15 mm.*



Zeigen sie, dass für die Kapazität gilt: $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ und berechnen sie C.

Lösung

Das D-Feld ändert sich nicht durch die Dielektrika, deshalb ist $D = \frac{Q}{A}$ Daraus erhalten wir das E-Feld in den beiden Bereichen:

$$E_1 = \frac{Q}{A\ \epsilon_0 \epsilon_{r1}} \qquad E_2 = \frac{Q}{A\ \epsilon_0 \epsilon_{r2}}$$

und daraus

$$U = U_1 + U_2 = E_1 a_1 + E_2 a_2 = \frac{Q}{A\epsilon_0\epsilon_{r1}} a_1 + \frac{Q}{A\epsilon_0\epsilon_{r2}} a_2$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{1}{\frac{a_1}{A\epsilon_0\epsilon_{r1}} + \frac{a_2}{A\epsilon_0\epsilon_{r2}}}$$

also

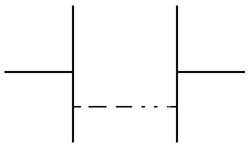
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\frac{A\epsilon_0\epsilon_{r1}}{a_1}} + \frac{1}{\frac{A\epsilon_0\epsilon_{r2}}{a_2}} \Rightarrow C = 0,152nF$$

Aufgabe 12 (Kondensator im Wasser) *Gegeben sei ein Plattenkondensator mit Plattenfläche 10 x 10 cm^2 im Abstand von 10 cm. Der Kondensator sei mit der Ladung Q = 885 pC geladen.*

a) *Berechnen Sie die Spannung U und das D-Feld zwischen den Platten!*

b) *Wie hoch steigt die Flüssigkeitssäule im Kondensator, wenn man ihn in einen großen Behälter mit reinem Wasser (Isolator, $\epsilon_{H_2O} = 81$) hält? Was passiert (qualitativ) bei konstanter Spannung?*

c) *Der Kondensator wird nun bei konstanter Ladung (885 pC) zu einer festen Füllhöhe von 1 cm mit reinem Wasser gefüllt. Berechnen Sie nun die Spannung zwischen den Platten (Hinweis: Die Anordnung kann als Parallelschaltung betrachtet werden).*



d) *Berechnen sie das D-Feld im Kondensator (Hinweis: $E_1 = E_2$ wegen „Stetigkeit der Tangentialkomponente" des E-Feldes).*

e) *Nun wird 0,1 μmol Kochsalz zum Zeitpunkt t=0 im Wasser gelöst. Die Lösung sei sofort gleichmäßig durchmischt und das Salz dissoziiert vollständig in einfach positiv geladene Natriumionen ($\frac{\tau}{m} = 2,88 \cdot 10^{11} \frac{m^2}{A\,V\,C}$) und einfach negativ geladene Chloridionen ($\frac{\tau}{m} = 4,31 \cdot 10^{11} \frac{m^2}{A\,V\,C}$). Nach welcher Zeit wird die Ladung auf dem Plattenkondensator auf $\exp(-2)Q_0$ reduziert?*

Lösung

a)

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 8,85 \cdot 10^{-13} F = 0,885 pF = 885 fF$$

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{885 \cdot 10^3 fC}{885 fF} = 10^3 V$$

$$D = \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{U}{d} = \epsilon_0 \frac{10^3 V}{0,1 m} = 8,85 \cdot 10^{-8} \frac{C}{m^2}$$

b)

$$\Delta W_{Hub} = mg\frac{h}{2};$$

$$W_{el} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2(C_1 + C_2)} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 \left(\sqrt{A}h\epsilon_r + A - \sqrt{A}h\epsilon_r\right)}$$

$$\Delta W_{el} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 \sqrt{A}h(\epsilon_r - 1) + \epsilon_0 A} - \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A}$$

$$\rightarrow \Delta W_{Hub} = \Delta W_{el}$$

$$\sqrt{A}d\frac{h^2}{2}\rho g = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{A}h(\epsilon_r - 1) + A} + \frac{1}{A}\right)$$

$$h = \sqrt{\frac{A}{4(\epsilon_r - 1)^2} + \frac{Q^2}{\epsilon_0 A^{3/2}\rho g}} - \frac{\sqrt{A}}{2(\epsilon_r - 1)} = 0,00244 m$$

Bei konstanter Spannung ist $W_{el} = \epsilon_r \frac{C_0 U^2}{2} > \frac{C_0^2 U}{2}$, *das Wasser wird also aus dem Kondensator heraus gedrückt.*

c)

$$C_{ges} = C_1 + C_2 = \epsilon_0 \frac{0,1m \cdot 0,09m}{0,1m} + \epsilon_0 \frac{81 \cdot 0,1m \cdot 0,01m}{0,1m} = \epsilon_0 (0,09m + 0,81m)$$

$$C_{ges} = \epsilon_0 \; 0,9m = 7,97 \cdot 10^{-12} F \rightarrow U = 111V$$

d)

$$E = E_1 = E_2 = \frac{U}{d} = 1,11 \frac{MV}{m}$$

$$D_1 = \epsilon_0 \epsilon_{H_2O} E = 7,96 \cdot 10^{-4} \frac{C}{m^2}$$

$$D_2 = \epsilon_0 E = 9,82 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}$$

Das D-Feld ändert sich, da sich mit der unterschiedlichen Kapazität der Teilkondensatoren die Ladungsverteilung auf den Kondensatorplatten ändert.

e)

$$\sigma = \frac{N q^2 \tau_s}{m} = N e^2 (2,88 \cdot 10^{11} \frac{m^2}{A\;V\;C} + 4,31 \cdot 10^{11} \frac{m^2}{A\;V\;C})$$

$$N = \frac{10^{-7} N_A}{10^{-4} m^3} = 6,02 \cdot 10^{20} m^{-3}$$

$$\sigma = N \cdot e^2 (7,19 \cdot 10^{11}) = 1,11^{-5} \frac{1}{\Omega\; m}$$

$$R = \frac{L}{\sigma A} = 9,01 M\Omega$$

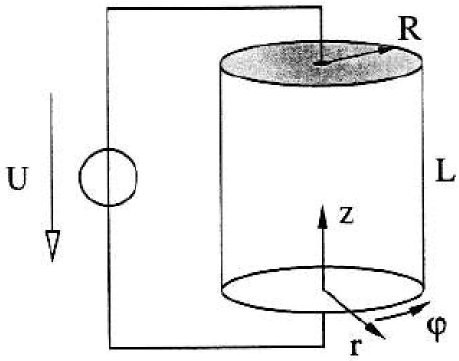
$$\dot{Q} = -\frac{U}{R} = -\frac{Q}{C\;R} \rightarrow Q(t) \propto \exp(\frac{-t}{R\;C})$$

$$\frac{t_1}{R\;C} \stackrel{!}{=} 2 \qquad t_1 = 2R\;C = 1,44 \mu s$$

Aufgabe 13 (elektrischer Strom) *Gegeben ist ein zylinderförmiger ohmscher Leiter mit dem Radius R und der, Länge L. An diesen ist über die ideal leitende Deck- und Bodenfläche eine ideale Spannungsquelle mit der Spannung U angeschlossen (siehe Abbildung). Im Leiter verteilt fließt ein elektrischer Strom entgegen der z-Richtung. Der Betrag der Stromdichte* $\vec{j}(\vec{r}) = -j(r)\vec{e}_z$ *im Leiter lautet in Zylinderkoordinaten:*

$$j(r) = \begin{cases} j_0(2 - (\frac{r}{R})^2) & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

In dem Leiter Leiter tragen nur Elektronen mit der konstanten Beweglichkeit $/mu_e = \frac{q\tau}{m} > 0$ *zum Stromtransport bei.*



a) Das elektrische Feld $\vec{E}$ im Inneren des Zylinders sei konstant. Bestimmen Sie Betrag und Richtung von E?

b) Berechnen Sie den Strom I, der durch die gesamte Anordnung fließt.

c) Wie groß ist die in dem Leiter abfallende Leistung P(=U I)?

d) Bestimmen Sie die spezifische elektrische Leitfähigkeit $\sigma(r)$.

e) Berechnen Sie Betrag und Richtung der Driftgeschwindigkeit $\vec{v}_e$ der Elektronen.

f) Wie groß ist die Teilchendichten n(r) der Elektronen, die zum Stromtransport beitragen?

Lösung

a) Aus der Zylindersymmetrie und $U = \int \vec{E}\ d\vec{s}$ folgt:

$$\vec{E} = -E\vec{e}_z$$

b) Durch Flächenintegration ergibt sich mit dem Flächenelement $d\vec{A} = \vec{e}_z r\ drd$ $varphi$ aus der Stromdichte der Gesamtstrom:

$$I = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R} j(r)(-\vec{e}_z)\vec{e}_z r dr d\varphi = 2\pi j_0 \int\limits_0^{R} 2r - \frac{r^3}{R^2} dr = \frac{3\pi j_0 R^2}{2}$$

c)

$$P = UI = U\frac{3\pi j_0 R^2}{2}$$

d)

$$\sigma(r) = \frac{j(r)}{E}?\frac{L}{U}j_0(2 - (\frac{r}{R})^2) = \sigma_0(2 - (\frac{r}{R})^2)$$

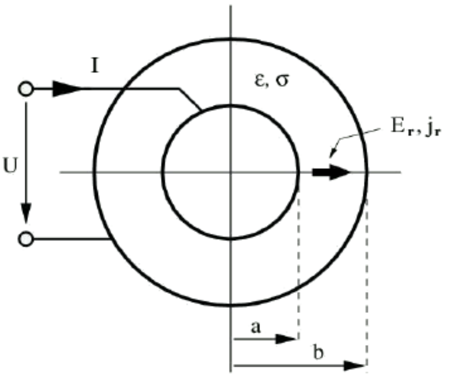
e)

$$\vec{v}_e = \frac{e\vec{E}\tau_s}{m_e} = -\mu_e\vec{E} = \mu_e\frac{U}{L}\vec{e}_z$$

f) *Mit der Stromdichte* $j(r) = qn(r)v_e$ *folgt*

$$n(r) = \frac{j_0(2-(\frac{r}{R)^2)L}}{q\mu\, U}$$

Aufgabe 14 (Kugelkondensator) *Gegeben ist ein Kugelkondensator. Der Radius der Innenelektrode beträgt a=5 mm, der Radius der Außenelektrode b= 15 mm. Der Raum zwischen den Elektroden ist mit einer Flüssigkeit gefüllt, die eine relative Dielektrizitätskonstante* ϵ_r *=4 und eine spezifische Leitfähigkeit* $\sigma = 10^{-3}\Omega^{-1}m^{-1}$ *besitzt. An den Elektroden liegt eine Spannung U und es fließt ein Strom I.*



a) *Bestimmen Sie die Stromdichteverteilung* $\vec{j}(r) = j_r(r)\vec{e}_r$ *in Abhängigkeit von I*

b) *Ermitteln Sie daraus die Feldstärke* $E_r(r)$

c) *Berechnen Sie damit die Spannung U in Abhängigkeit von I*

d) *Berechnen Sie den Widerstand R der Anordnung*

e) *Welche Kapazität besitzt die Anordnung?*

Lösung

a) Durch jede Kugelschale mit Radius a < r < b fließt der Gesamtstrom I:

$$\oint \vec{j}(r)\; d\vec{A} = I$$

also

$$j_r(r) 4\pi\, r^2 = I$$

also

$$j_r(r) = \frac{I}{4\pi\, r^2}$$

b) Die Feldstärke erhalten wir dann aus dem Ohm'schen Gesetz:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$E_r = \frac{j_r}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2}$$

c)

$$U = \Phi_{innen} - \Phi_{außen} = -\int_a^b \vec{E}\, d\vec{r} = \int_a^b E_r\, dr = \int_a^b \frac{I}{4\pi\sigma r^2} dr = \frac{I}{4\pi\sigma}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$$

d)

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) = 10.6k\Omega$$

e) Für die Kapazität benötigen wir die Ladung auf den Elektroden, dafür erhalten wir mit der Lösung von b und dem Gaußschen Satz:

$$\frac{Q_1}{\epsilon_r \epsilon_0 = E \cdot O_{Kugel} = E_a 4\pi a^2 = \frac{I}{\sigma}}$$

also

$$Q_1 = I\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\sigma} \qquad \rightarrow \qquad C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = 3,3pF$$