

Repetitorium zu

Experimentalphysik 2

**Ferienkurs am Physik-Department der
Technischen Universität München**

Gerd Meisl

5. August 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Thermodynamik	2
1.1	reale Gase	2
1.2	Phasenübergänge	2
1.2.1	Phasendiagramme	2
1.2.2	Dampfdruck	3
1.2.3	Clausius-Clapeyron-Gleichung	4
1.2.4	Verflüssigung von Gasen	4
2	Elektrostatik	5
2.1	Grundbegriffe	5
2.1.1	Elektrische Ladung und elektrisches Feld	5
2.1.2	Elektrostatisches Potential	6
2.2	elektrischer Dipol	7
2.2.1	Dipolpotential	8
2.2.2	Dipol im elektrischen Feld	9
2.3	Leiter im elektrischen Feld, Influenz	9
2.4	Kondensator	10
2.5	Dielektrika	11
2.5.1	Definitionen	11
2.5.2	Dielektrische Verschiebungsdichte D	12
3	Elektrischer Strom	13
3.1	Grundlagen	13
3.1.1	Kontinuitätsgleichung	13
3.1.2	Ohmsches Gesetz	14

1 Thermodynamik

1.1 reale Gase

Bisher wurden nur „ideale Gase“ betrachtet, das heißt es wurde angenommen, dass:

- Gasatome und -moleküle Massepunkte ohne Volumen sind
- es zu keiner Wechselwirkung zwischen den Gasteilchen kommt

Dieses Modell ist aber offensichtlich für viele Gase nicht zutreffend, denn ohne Wechselwirkung zwischen den Molekülen lässt sich zum Beispiel die Kondensation von Wasserdampf zu Wasser nicht erklären.

Die Korrekturen werden durch Ergänzungen in der allgemeinen Gasgleichung beschrieben:

- vom Volumen wird das **Kovolumen** b abgezogen, da die einzelnen Teilchen mehr Platz brauchen als die idealisierten Massepunkte.
- zum Druck wird der **Binnendruck** $\frac{a}{V_{mol}^2}$ addiert, da der Druck (von außen!) noch durch die anziehende Wechselwirkung (Van der Waals Kräfte) der Teilchen verstärkt wird.

Damit erhält man die **Van-der-Waals-Gleichung**:

$$\left(P + \frac{a}{V_{mol}^2}\right)(V_{mol} - b) = RT \quad (1.1)$$

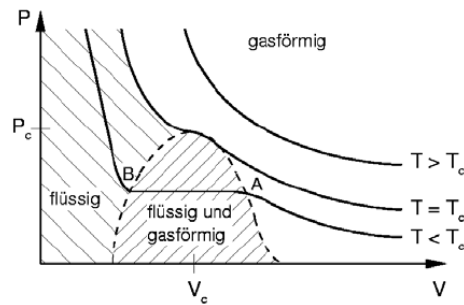
Die Gleichung ergibt in Grenzfällen bessere Ergebnisse als die ideale Gasgleichung:

- Wenn kein äußerer Druck vorhanden ist, bleibt das Gas wegen der Anziehungskräfte in einem endlichen Volumen.
- Wenn die Temperatur gegen Null geht muss das Volumen größer als das Eigenvolumen bleiben.

1.2 Phasenübergänge

1.2.1 Phasendiagramme

Jetzt betrachten wir die Isothermen der Van-der-Waals-Gleichung in einem P-V Diagramm.



Der Bereich $T < T_c$ wird von der Van-der-Waals-Gleichung aufgrund der Verflüssigung nicht richtig beschrieben.

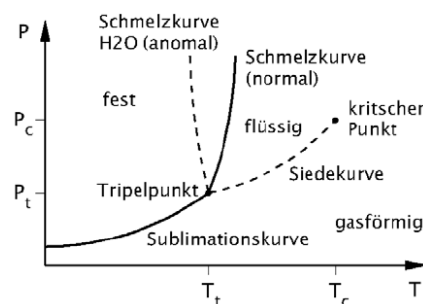
Wie man aus dem Diagramm erkennt hat die Kurve im kritischen Punkt einen Sattelpunkt, das bedeutet mathematisch, dass folgende Gleichungen erfüllt sein müssen:

$$\frac{\partial P(V_c, T_c)}{\partial V} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 P(V_c, T_c)}{\partial V^2} = 0$$

Dadurch können wir einen Zusammenhang zwischen den Parametern a und b und dem Zustand am kritischen Punkt herstellen:

$$a = 3V_{mol,c}^2 P_c \quad b = \frac{1}{3} V_{mol,c} \quad (1.2)$$

Außer P-V Diagrammen werden auch noch P-T Diagramme verwendet:



Zum kritischen Punkt hin nähern sich die Dichte des Gases (steigender Druck) und die Dichte der Flüssigkeit (Wärmeausdehnung) einander an. Ab dem kritischen Punkt lassen sich flüssige Phase und Gasphase nicht mehr unterscheiden.

1.2.2 Dampfdruck

Bei Phasenumwandlungen gibt ein Stoff Wärme ab oder nimmt sie auf, ohne seine Temperatur zu ändern. Diese Wärme nennt man latente Wärme. Der Grund ist eine Änderung der Bindungsenergie zwischen den Atomen oder Molekülen.

Versucht man eine Flüssigkeit in einen ansonsten leeren Raum zu bringen, beginnt die Flüssigkeit zu verdampfen, bis sich ein bestimmter, temperaturabhängiger Druck, der **Sättigungsdampfdruck** eingestellt hat. Ist der Dampfdruck größer als der äußere, auf der Flüssigkeitsoberfläche lastende Druck bilden sich im Inneren der Flüssigkeit Dampfblasen und die Flüssigkeit siedet.

Im P-T Diagramm ist der Sättigungsdampfdruck der Wert des Druckes entlang der Phasengrenzlinie zwischen der Gasphase und der korrespondierenden flüssigen Phase. Diese Phasengrenzlinie wird daher auch als Dampfdruckkurve oder Sättigungsdampfdruckkurve bezeichnet.

1.2.3 Clausius-Clapeyron-Gleichung

Die Clausius-Clapeyron-Gleichung stellt einen Zusammenhang zwischen der spezifischen Verdampfungswärme q_v (Energie um ein kg des Stoffes zu verdampfen) und der Steigung der Siedekurve her.

$$q_v = T \frac{dP_S}{dT} \left(\frac{1}{\rho_d} - \frac{1}{\rho_{fl}} \right)$$

Oder als Differentialgleichung für die Dampfdruckkurve:

$$\frac{dP_S}{dT} = \left(\frac{q_v}{T} \frac{\rho_D - \rho_{FL}}{\rho_{fl} - \rho_D} \right)$$

in der ρ_d die Dichte des Dampfes und ρ_{fl} die Dichte der Flüssigkeit darstellen. Die Gleichung gilt auch für den Übergang von fest nach flüssig und fest nach gasförmig (Sublimation).

1.2.4 Verflüssigung von Gasen

Um Gase bei einem gegebenen Druck verflüssigen zu können, müssen sie unter die Siedetemperatur abgekühlt werden. Dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- die adiabatische Expansion
- den Joule-Thomson-Effekt, der von der Stärke der Wechselwirkung zwischen den Teilchen abhängt und Grundlage für den Linde-Prozess ist

2 Elektrostatik

2.1 Grundbegriffe

2.1.1 Elektrische Ladung und elektrisches Feld

Die elektrische Ladung ist:

- an Elementarteilchen gekoppelt
- tritt in vielfachen der Elementarladung auf, $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ auf (Millikan-Versuch), sie hat die SI Einheit Coulomb [C]. Die Ladung kann positiv oder negativ sein.
- ist eine Erhaltungsgröße

Ladungen üben Kräfte aufeinander aus deren Stärke und Richtung durch das **Coulomb-Gesetz** beschrieben werden:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{r_{12}} \quad (2.1)$$

Dabei ist F_{12} die auf Ladung 2 wirkende Kraft, r_{12} der Abstand zwischen den Ladungen, $\vec{e}_{r_{12}}$ der Einheitsvektor mit Richtung von Ladung 1 zu Ladung 2 und ($\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$) die Dielektrizitätskonstante im Vakuum.

Die Kraftwirkung der elektrischen Ladung lässt sich auch durch das **elektrische Feld** beschreiben:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_{12}^2} \vec{e}_{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} (\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (2.2)$$

Das elektrische Feld beschreibt also die Kraft pro Ladung.

Eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung erzeugt das gleiche elektrische Feld wie eine Punktladung, die sich in der Mitte der Ladungsverteilung befindet.

Im Inneren einer homogen geladenen Kugelschale existiert kein elektrisches Feld.

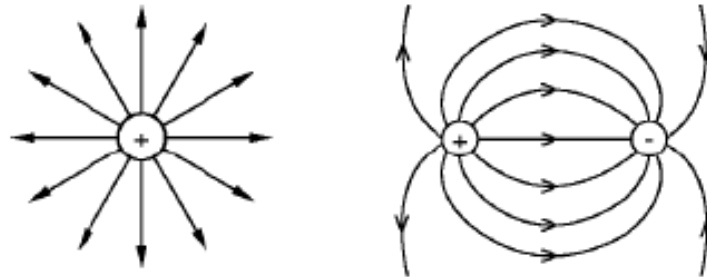
Da sich die Kräfte von mehreren Ladungen addieren, addieren sich auch die elektrischen Felder:

$$\vec{E}_{ges} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \quad (2.3)$$

bzw.

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\vec{R} - \vec{r}}{(\vec{R} - \vec{r})^3} \rho(\vec{r}) dV \quad (2.4)$$

Mit Hilfe der „Feldlinien“ kann man sich das elektrische Feld veranschaulichen: Die Linien geben die Kraft an, die in einem Punkt auf das Teilchen wirken würde. Sie zeigen in Richtung der negativen Ladungen. Ebenen senkrecht zu den Feldlinien sind Äquipotentialflächen (deshalb stehen die Feldlinien immer senkrecht auf metallischen Oberflächen).



Das elektrische Feld einer unendlich ausgedehnten Fläche ist $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Das Feld ist also homogen (ortsunabhängig). In der Realität existiert kein vollständig homogenes Feld, aber das Feld in der Mitte eines Plattenkondensators (siehe unten) ist in guter Näherung homogen.

Der elektrische Fluss durch eine Fläche ist das Produkt von Fläche und der dazu senkrechten Komponente des elektrischen Feldes. Im Allgemeinen (inhomogenes Feld, gekrümmte Fläche) muss der Fluss als Integral berechnet werden:

$$\Phi_{el} = \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint_A \langle \vec{E}; \vec{n} \rangle dA$$

Für „symmetrische“ Ladungsverteilungen (wenn die Richtung des elektrischen Feldes ohne Rechnung ersichtlich ist) lässt sich das Feld oft schnell mit Hilfe des **Gaußschen Satzes** berechnen:

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (2.5)$$

2.1.2 Elektrostatisches Potential

Da das elektrische Feld konservativ ist (verrichtete Arbeit ist unabhängig vom Weg) hängt das Wegintegral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{t_0}^{t_1} q \langle \vec{E}(\vec{r}(t)); \dot{\vec{r}}(t) \rangle dt$ nur vom Anfangs- und Endpunkt ab. Deshalb ist das **elektrostatische Potenzial**

$$\Phi(\vec{P}) = \int_{\vec{P}}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.6)$$

eindeutig. Nach Konvention ist $\Phi(\infty) = 0$.

Damit ist $q \cdot \Phi(P)$ die verrichtete Arbeit, wenn die Ladung q von P ins Unendliche gebracht wird.

Als **elektrische Spannung** zwischen den Punkten P_0 und P_1 definieren wir die Potentialdifferenz zwischen diesen Punkten:

$$U = \Phi(P_0) - \Phi(P_1) = \int_{P_0}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.7)$$

Durchläuft eine Ladung q eine Spannung U , so ist $\Delta E_{Kin} = qU$.

Durchläuft ein Elektron eine Spannung von einem Volt hat es danach eine Energie von $1,602 \cdot 10^{-19} J$, weshalb diese Energiemenge als Elektronvolt bezeichnet wird.

Aus einem gegebenen Potential kann man das elektrische Feld berechnen:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (2.8)$$

Aus der **Poisson-Gleichung**

$$\Delta\Phi := \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = -\operatorname{div} \vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.9)$$

kann man das Potential auch direkt aus der Ladungsverteilung berechnen.

Auch das Potential genügt dem Superpositionsprinzip. Für mehrere Ladungen, bzw. einer kontinuierlichen Ladungsverteilung, gilt deshalb:

$$\Phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\vec{R} - \vec{r}_i|} \quad (2.10)$$

oder

$$\Phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(x, y, z)}{|\vec{R} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}|} dx dy dz \quad (2.11)$$

Da das Potential ein Skalarfeld ist lässt es sich i.A. leichter berechnen als das elektrische Feld, bei dem für jede Komponente ein Integral gelöst werden muss.

2.2 elektrischer Dipol

Ein elektrischer Dipol besteht aus zwei entgegengesetzt gleichen Ladungen. Ist \vec{d} der Vektor von der negativen zur positiven Ladung (entgegengesetzt zum elektrischen Feld) und ist $Q_1 = Q = -Q_2$, so bezeichnet man

$$\vec{p} = Q \vec{d} \quad (2.12)$$

als das **Dipolmoment**.

2.2.1 Dipolpotential

Mit (2.11) können wir das Potential und damit das elektrische Feld eines Dipols berechnen (den Koordinatenursprung legen wir dazu zwischen die 2 Ladungen, die z-Achse durch die beiden Ladungen):

$$\Phi_D(\vec{R}) = \Phi_{Q_0(R)} + \Phi_{Q_1(R)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{|\vec{R} - \vec{d}/2|} + \frac{Q_2}{|\vec{R} + \vec{d}/2|} \right] \quad (2.13)$$

$$\Phi_D(\vec{R}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(R^2 - zd + d^2/4)^{1/2}} - \frac{1}{(R^2 + zd + d^2/4)^{1/2}} \right]$$

Um das Potential in größerer Entfernung vom Dipol zu bestimmen, können wir den d^2 Term vernachlässigen und durch ausklammern von $\frac{1}{R}$ ergibt sich:

$$\Phi_D(\vec{R}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{zd}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{zd}{R^2}}} \right]$$

Führt man jetzt noch ein Taylorentwicklung nach d durch und vernachlässigt alle Terme höherer Ordnung ergibt sich:

$$\Phi_D(\vec{R}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 + \frac{zd}{2R^2} - 1 + \frac{zd}{2R^2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{2zd}{2R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pz}{R^3}$$

Bezeichnet man den Winkel zwischen dem Dipol und dem Punkt \vec{R} als θ (dann ist $z = R \cos(\theta)$) und berücksichtigt, dass $p R \cos(\theta)$ das Skalarprodukt zwischen \vec{p} und \vec{R} ist, erhält man als Näherung des Dipolpotentials im Fall $d \ll R$:

$$\Phi_D(\vec{R}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}\vec{R}}{R^3} \quad (2.14)$$

Das Dipolpotential ist deshalb (den Beitrag von \vec{R} im Zähler nicht vergessen!) proportional zu $\frac{1}{R^2}$. Es fällt schneller ab als das Potential eines Monopols ($\propto \frac{1}{R}$) da sich die entgegengesetzten Potentiale von $-Q$ und Q zunehmend kompensieren.

Auf der Symmetrieebene $z=0$ ($\Theta = 90^\circ$) ist $\Phi_D = 0$, es gibt keine anziehende Kraft (aber noch eine Kraftkomponente parallel zum Dipol).

Mit (2.8) erhält man nach einigen Umformungen:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3pzx}{R^5} \quad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3pzy}{R^5} \quad E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3z^2x}{R^5} - \frac{p}{R^3} \right)$$

$$\vec{E} = 3 \frac{\langle \vec{R}; \vec{p} \rangle}{R^5} \vec{R} - \frac{\vec{p}}{R^3}$$

Mit den Formeln

$$\vec{p} = \iiint \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV \quad \text{bzw.} \quad \vec{p} = \sum_i \vec{r}_i q_i \quad (2.15)$$

lässt sich jeder Ladungsverteilung ein Dipolmoment zuordnen.

2.2.2 Dipol im elektrischen Feld

Kraft auf den Dipol

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q \vec{E}(\vec{r} + \vec{d}) - q \vec{E}(\vec{r}) = q d \frac{\vec{E}(\vec{r} + d\vec{e}_d) - \vec{E}(\vec{r})}{d} \\ \vec{F} &\approx \vec{p}^T \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^T \end{aligned} \quad (2.16)$$

In einem homogenen Feld gibt es keine Ortsabhängigkeit, also ist $\vec{\nabla} \vec{E}^T = 0$. Die Kräfte auf den Dipol heben sich auf.

Drehmoment auf den Dipol

$$\vec{D} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_0 - 0, 5\frac{\vec{p}}{q}) \times (-q \vec{E}_1) + (\vec{r}_0 + 0, 5\frac{\vec{p}}{q}) \times (q \vec{E}_2)$$

Wenn $\Delta E_{12} \ll E$ vereinfacht sich das zu:

$$\vec{D} = \vec{p} \times \vec{E} \quad \text{und} \quad D = p E \sin \alpha \quad (2.17)$$

Ist der Dipol parallel oder antiparallel zum elektrischen Feld ausgerichtet wirkt auf ihn kein Drehmoment, die antiparallele Lage ist aber offensichtlich instabil. Um das zu bestätigen betrachten wir die potentielle Energie des Dipols:

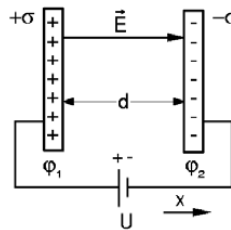
$$\begin{aligned} W_{pot} &= Q\Phi_1 + (-Q)\Phi_2 = Qd \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{d} = p(\vec{\nabla} \Phi) \\ W_{pot} &= -\vec{p} \cdot \vec{E} \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.3 Leiter im elektrischen Feld, Influenz

Befindet sich ein elektrischer Leiter in einem elektrischen Feld verlagern sich die freien Ladungsträger (meist Elektronen) so lange bis das äußere Feld kompensiert ist. Diese Ladungsverschiebung bezeichnet man als Influenz. Das Innere eines Leiters ist durch dadurch im statischen Fall feldfrei. Diese Eigenschaft von Metallen wird beispielsweise bei Faradayschen Käfigen genutzt.

2.4 Kondensator

Ein Plattenkondensator besteht aus 2 parallel angeordneten mit einer Stromquelle verbundenen Platten und wird z.B. zum Speichern von Energie und zum Erzeugen von relativ homogenen elektrischen Feldern eingesetzt.



Das elektrische Feld lässt sich leicht über den Gaußschen Satz berechnen, oder durch Addition der bekannten Felder $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ der beiden Platten: Außerhalb der Platten heben sich die Felder gegenseitig auf, in der Mitte addieren sie sich:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0} \quad (2.19)$$

Die Spannung ist damit:

$$U = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_2} E_0 dx = E d \quad (2.20)$$

Ein wichtiger Begriff im Zusammenhang mit Kondensatoren ist ihre **Kapazität C**:

$$C := \frac{Q}{|U|} \quad (2.21)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{E d} = \frac{\sigma A}{(\sigma/\epsilon_0) d} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (2.22)$$

Die Einheit der Kapazität ist: $[1 \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}}] = [1 \text{Farad}] = [1F]$

Die Herleitung der Kapazität erfolgt im allgemeinen Fall meist analog: Aus der Ladungsverteilung wird $\vec{E}(Q)$ berechnet, daraus durch Integration $U(Q)$ und durch einsetzen in (2.21) die Kapazität.

Energie eines Plattenkondensators Zum Aufbau des elektrischen Feldes müssen Elektronen verschoben werden. Dazu wird Arbeit aufgewendet, die im Kondensator gespeichert bleibt. Wir überlegen dazu, welche Arbeit für ein Elektron aufgebracht werden muss:

$$E_n = \left| \vec{E}_n \right| = \frac{e(n-1)}{A \epsilon_0} \quad F_n = q E_n$$

$$W_N = \sum_{n=1}^N d \cdot F_n = \frac{d q^2}{A \epsilon_0} \sum_{n=1}^N (n-1) = \frac{d q^2}{A \epsilon_0} \left(\frac{N^2 + N}{2} - N \right) = \frac{d q^2}{2A \epsilon_0} (N^2 - N) \approx \frac{d q^2}{2A \epsilon_0} N^2$$

Da $N^2 \gg N$. Mit $Q = Nq$, (2.22) und (2.21) ist dann

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2 \quad (2.23)$$

Es stellt sich heraus, dass die Energie direkt im elektrischen Feld gespeichert ist. Es macht deshalb Sinn, die Energiedichte

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon A E^2 d^2}{2d A d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (2.24)$$

zu definieren.

Die Formel

$$w(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} E(\vec{r})^2 \quad (2.25)$$

gilt für die Energiedichte eines beliebigen elektrischen Feldes.

2.5 Dielektrika

2.5.1 Definitionen

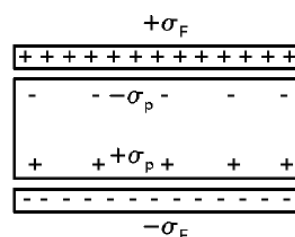
Dielektrika sind schwach- oder nichtleitende Materialien. Ein Dielektrikum wird in einem elektrischen Feld **polarisiert**, d.h. die Ladungen werden im Dielektrikum verschoben. Das ist aber nur innerhalb eines Atoms oder Moleküls möglich, sodass das Feld nicht vollständig abgeschirmt werden kann.

Durch die Ladungsverschiebung entsteht das **induzierte Dipolmoment** $\vec{p} = q\vec{\delta} = \alpha\vec{E}$ mit der Materialkonstante α , „Polarisierbarkeit“ genannt. Die **Polarisation** ist die Dichte der induzierten Dipolmomente:

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V}$$

Dies führt auf den Oberflächen zu einer (scheinbaren) Flächenladungsdichte:

$$P = Np = Nqd \frac{A}{A} = \frac{Q_{Pol}}{A} = \sigma_{Pol}$$



2 Elektrostatik

Das elektrische Feld im Dielektrikum ist deshalb:

$$E_{Diel} = \frac{\sigma_{frei} - \sigma_{Pol}}{\epsilon_0} = E_{Vak} - \frac{P}{\epsilon_0} \quad (2.26)$$

Es ist also kleiner als das äußere Feld.

Da das induzierte Dipolmoment proportional zum elektrischen Feld ist, gilt das auch für die Polarisation.

Die Proportionalitätskonstante von \vec{P} und $\epsilon_0 \vec{E}$ ist die **dielektrische Suszeptibilität** χ :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}_{Diel} \quad (2.27)$$

Mit der **relativen Dielektrizitätskonstante** $\epsilon_r := 1 + \chi$ ergibt sich für E_{Vak} :

$$\vec{E}_{Vak} = \vec{E}_{Diel} + \frac{P}{\epsilon_0} = \vec{E}_{Diel}(1 + \chi) = \epsilon_r \vec{E}_{Diel} \quad (2.28)$$

Mit (2.24) ist die Energiedichte im Dielektrikum:

$$w_D = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{2} E_{Diel}^2 \quad (2.29)$$

Kapazität eines Kondensators mit Dielektrikum

$$C_D = \frac{Q}{U} = \frac{Q/d}{U/d} = \frac{Q/d}{E_{Diel}} = \epsilon_r \frac{Q/d}{E_{Vak}} = \epsilon_r C_0$$

$$C_D = \epsilon_r \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (2.30)$$

2.5.2 Dielektrische Verschiebungsdichte D

$$\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E}_{Diel} + \vec{P} = (1 + \chi) \epsilon_0 \vec{E}_{Diel} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}_{Diel} \quad (2.31)$$

Die Verschiebungsdichte ist das elektrische Feld ohne Polarisationsladungen (das heißt nicht, dass Dielektrika die Verschiebungsdichte nicht ändern).

Mit der Verschiebungsdichte erhält man eine alternative Formel für die Energiedichte:

$$w_D = \frac{1}{2} E_{Diel} D \quad (2.32)$$

3 Elektrischer Strom

3.1 Grundlagen

Elektrischer Strom bedeutet einen Transport elektrischer Ladungen. Die **Stromstärke I** ist die pro Zeiteinheit fließende Ladungsmenge, ihre Einheit ist das Ampere:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (3.1)$$

Für eine exaktere, mikroskopische Beschreibung des Stroms definieren wir die **Stromdichte \vec{j}** . Das ist der elektrische Strom pro Fläche.

Der Zusammenhang zwischen Stromstärke und Stromdichte ist:

$$I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \quad (3.2)$$

Wenn wir einen Leiter mit N geladenen Teilchen pro Volumenelement betrachten, die sich mit einer Geschwindigkeit \vec{v} bewegen, ist die Stromdichte:

$$\vec{j} = Nq\vec{v} = \rho_{el}\vec{v} \quad (3.3)$$

Bei einer ortsunabhängigen Stromdichte und dem Einheitsvektor \vec{n} in Richtung des Leiters folgt:

$$I = NqA \langle \vec{n}; \vec{v} \rangle \quad (3.4)$$

Die Richtung des elektrischen Stroms I ist definiert als der Fluss positiver Ladungsträger, der technische Strom fließt also immer von Plus nach Minus.

3.1.1 Kontinuitätsgleichung

$$I = \oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{A} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_{el} dV \quad (3.5)$$

Der Gesamtstrom durch eine geschlossene Oberfläche entspricht der Änderung der von der Oberfläche eingeschlossenen Ladung. Durch den Gaußschen Integralsatz kann man die Formel auf die differentielle Form bringen:

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_{el}(\vec{r}, t) \quad (3.6)$$

3.1.2 Ohmsches Gesetz

Was passiert wenn man einen Leiter in einem elektrisches Feld positioniert? Da dann eine Kraft auf die im Leiter frei beweglichen Teilchen wirkt, kommt es wegen $\vec{F} = q\vec{E}$ zu einem Stromfluss.

Die Geschwindigkeit der Elektronen in einem Leiter aufgrund der thermischen Bewegung ist viel größer als die durch ein elektrisches Feld hervorgerufene „Driftgeschwindigkeit“ \vec{v}_D . Durch die statistische Richtungsverteilung der thermischen Bewegung ist die mittlere thermische Geschwindigkeit Null. Das elektrische Feld führt zu einer Beschleunigung in Feldrichtung, sodass ein Nettostrom fließt. Die fließenden Elektronen werden durch Stöße gegen Elektronen oder Atomen gestört.

Ist τ_s die mittlere Zeit zwischen 2 Stößen erhält man für die Driftgeschwindigkeit:

$$\langle v_D \rangle = \frac{eE}{m} \tau_s \quad (3.7)$$

Daraus erhalten wir mit (3.3) und

$$\vec{j} = \frac{Nq^2\tau_s}{m} \vec{E} \quad (3.8)$$

und mit der **elektrischen Leitfähigkeit** σ_{el} das **Ohmsche Gesetz**:

$$\vec{j} = \sigma_{el} \vec{E} \quad (3.9)$$

oder mit dem spezifischen Widerstand ρ_s in der bekannteren alternativen Formulierung:

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{A} = \frac{\sigma_{el} A L}{L} E = \frac{\sigma_{el} A}{L} U$$

$$U = \rho_s \frac{L}{A} I = RI \quad (3.10)$$

Dabei ist R der Widerstand mit der Einheit $[R] = 1 \frac{V}{A} = 1 \text{Ohm} = 1\Omega$.

Die Leitfähigkeit ist temperaturabhängig. Bei Metallen sinkt sie bei einem Temperaturanstieg, bei Halbleitern wird sie größer.

Manche Materialien zeigen bei sehr niedrigen Temperaturen Supraleitung, das heißt der Widerstand ist Null.