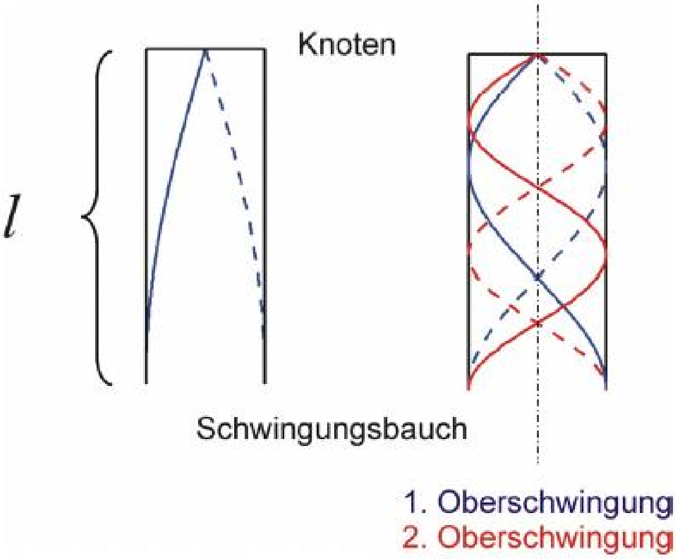
Musterlösung zur Übung am Freitag

Aufgabe 1:

a) Randbedingungen: oben: Schwingungsknoten
unten: Schwingungsbauch



b) Vergleich mit der allgemeinen Wellengleichung $\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$ ergibt eine Ausbreitungsgeschwindigkeit c von $c = \sqrt{\frac{D \cdot l^2}{m_0}} = \sqrt{\frac{12N/m}{0{,}15kg}} \cdot 0{,}6m = \underline{\underline{5{,}37m/s}}$

c) $f_0 = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{4l} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{D}{m_0}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{12N/m}{0{,}15kg}} = \underline{\underline{2{,}24s^{-1}}}$

d) $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m_{eff}}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{D}{m_0}} \quad \Rightarrow \quad m_{eff} = \frac{4}{\pi^2} \cdot m_0 = \frac{4}{\pi^2} \cdot 150g = \underline{\underline{60{,}8g}}$

Aufgabe 2:

Die Schallgeschwindigkeit ist proportional zu der Wurzel der Temperatur, also $c = \nu\lambda = x\sqrt{T}$. Die Wellenlänge ist bei einer stehenden Welle temperaturunabhängig, d.h. $\nu = y\sqrt{T}$. Leiten wir ν nach T ab, so erhalten wir:

$$\frac{d\nu}{dT} = \frac{y\sqrt{T}}{2T} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\nu}{\nu} = \frac{1}{2}\frac{dT}{T}$$

Integrieren:

$$\int_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\nu'}{\nu'} = \frac{1}{2}\int_{T_0}^{T} \frac{dT'}{T'} \quad \Longrightarrow \quad \ln\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{1}{2}\ln\frac{T}{T_0} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 = \frac{T}{T_0}$$

Auflösen nach T und Einsetzen der Werte ergibt

$$T = T_0\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 = 325,84K \quad \Longrightarrow \quad \Delta T = 35,84°C$$

Auf dieses Ergebnis kommt man aber auch direkt...(so wie wir es in der Übung gemacht haben)

Aufgabe 3:

a): $\omega = 2\pi\nu = 628s^{-1}$
b): $\lambda = 2\pi/k = (2\pi c)/(2\pi\nu) = c/\nu = 3,3m$
c): $T = 1/\nu = 0,01s$
d): $k = \omega/c = 2\pi\nu/c = 1,9m^{-1}$
e): $y = y_0 \sin\left(k(x+ct)\right) = y_0 \sin\left(kx + \omega t\right)$

Aufgabe 4:

a):
Wir bezeichnen mit ν_0 die Frequenz, die F1 beim Aussenden selbst hört, mit ν_3 die Frequenz, die von der Wand reflektiert und dann von F1 wahrgenommen wird, mit ν_1 diejenige, die von F2 gehört wird und ν_4 ist die Frequenz, die F2 nach Reflexion an der Wand wahrnimmt. Für diese Frequenzen gilt laut Vorlesungsskript:

$$\nu_0 = 5\cdot 10^4 Hz, \qquad \nu_3 = \nu_0\frac{1+v_1/c}{1-v_1/c} = 5,31\cdot 10^4 Hz$$

$$\nu_1 = \nu_0\frac{1}{1+v_1/c} = 4,85\cdot 10^4 Hz, \qquad \nu_2 = \nu_0\frac{1}{1-v_1/c} = 5,16\cdot 10^4 Hz$$

b):
Die Wand empfängt nun die Freqzenz

$$\nu_2'' = \nu_0\frac{1+v_W/c}{1-v_1/c}$$

Die von ihr reflektierte Frequenz ist für einen ruhenden Beobachter (also auch für F2):

$$\nu_2' = \frac{\nu_2''}{1-u_W/c} = \nu_0\frac{1+u_W/c}{(1-u_W/c)(1-u_1/c)} = 5,19\cdot 10^4 Hz$$

F1 nimmt für die von der Wand reflektierte Frequenz war:

$$\nu_3' = \nu_2'(1+v_1/c) = \nu_0\frac{(1+u_W/c)(1+v_1/c)}{(1-u_W/c)(1-v_s/c)} = 5,34\cdot 10^4 Hz$$

Die Änderungen sind also sehr klein, trotzdem können Fledermäuse sie wahrnehmen.

Aufgabe 5:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right)\cos(\omega_m t - k_m z) = 2A\cos(85t - 0,25z)\cos(715t - 1,75z)$$

$$v_{1Ph} = \frac{\omega_1}{k_1} = 400m/s$$

$$v_{2Ph} = \frac{\omega_2}{k_2} = 420m/s$$

$$v_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{170}{0,5}m/s = 340m/s$$

Aufgabe 6:

(a) Um den gewünschten Zusammenhang zu zeigen, gehen wir so vor, dass wir v, L und c als gegeben betrachten und die (irdische) Ankunftszeit des Lichtsignals berechnen: Die Bewegung des Raumschiffs A wird beschrieben durch

$$x = vt \tag{50}$$

Also kommt es zur Zeit $t_0 = L/v$ an seinem Ziel an. Zu diesem Zeitpunkt wird ein Lichtstrahl zur Erde zurückgeschickt, der dort also zur Zeit

$$T = t_0 + \frac{L}{c} = \frac{L}{v} + \frac{L}{c} = L\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{c}\right) \tag{51}$$

ankommt. Löst man dies nun nach v auf, dann erhält man

$$\frac{1}{v} = \frac{T}{L} - \frac{1}{c} \tag{52}$$

also

$$v = \frac{1}{\frac{T}{L} - \frac{1}{c}} = \frac{c}{\frac{cT}{L} - 1} \tag{53}$$

q.e.d. Für Raumschiff B gilt natürlich dasselbe, da es dieselbe Entfernung zurücklegt.

(b) Als erstes berechnen wir mit Hilfe von Teil (a) die Geschwindigkeit von A. L ist dabei 1 Lichttag und cT ist 8/3 Lichttage, also

$$\frac{v}{c} = \left(\frac{8/3\,\mathrm{LT}}{1\,\mathrm{LT}} - 1\right)^{-1} = \frac{3}{5} \tag{54}$$

Und den zugehörigen γ-Faktor rechnen wir auch schon mal vorsichtshalber aus:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{5}{4} \tag{55}$$

Dann kommt die Lorentz-Transformation: Das erste Ereignis, um das es geht (nämlich die Ankunft von A bei L) hat im Erdsystem die Raumzeit-Koordinaten

$$t_A = \frac{L}{v} \quad , \quad x_A = L \tag{56}$$

Die Lorentz-Transformation für die Zeitkoordinate lautet

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \tag{57}$$

also hat das Ereignis im Inertialsystem von A die Zeitkoordinate

$$t'_A = \gamma \left(\frac{L}{v} - \frac{v}{c} \frac{L}{c} \right) \tag{58}$$

Mit $L = c \cdot 1$ Tag folgt:

$$t'_A = \gamma \left(\frac{c}{v} - \frac{v}{c} \right) \cdot 1 \text{ Tag} = \frac{5}{4} \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{5} \right) \cdot 1 \text{ Tag} \tag{59}$$

also

$$\boxed{t'_A = \frac{4}{3} \text{Tage}} \tag{60}$$

Das andere Ereignis ist die Ankunft von B bei $-L$ mit den Koordinaten im Erdsystem

$$t_B = \frac{L}{v} \quad , \quad x_B = -L \tag{61}$$

Also hat das Ereignis im Inertialsystem von A die Zeitkoordinate

$$t'_B = \gamma \left(\frac{L}{v} - \frac{v}{c} \frac{(-L)}{c} \right) \tag{62}$$

Mit $L = c \cdot 1$ Tag folgt:

$$t'_B = \gamma \left(\frac{c}{v} + \frac{v}{c} \right) \cdot 1 \text{ Tag} = \frac{5}{4} \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{5} \right) \cdot 1 \text{ Tag} \tag{63}$$

$$\boxed{t'_B = \frac{17}{6} \text{ Tage}} \tag{64}$$

Aufgabe 7:

a.) Das Buch hat auf Grund der Schwerkraft eine konstante, nach unten gerichtete Beschleunigung vom Betrag $g \approx 10\,\mathrm{ms}^{-2}$. Daher ist die vom Passagier beobachtete Flugbahn:

$$x' = 0, \qquad y' = -\frac{1}{2} g \cdot t'^2 \tag{14}$$

Der Passagier sieht das Buch geradlinig nach unten fallen.
Laut Badegast ist nun (v = Geschwindigkeitsbetrag des Schiffes)

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + v \cdot t' \\ y &= y' \\ t &= t' \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

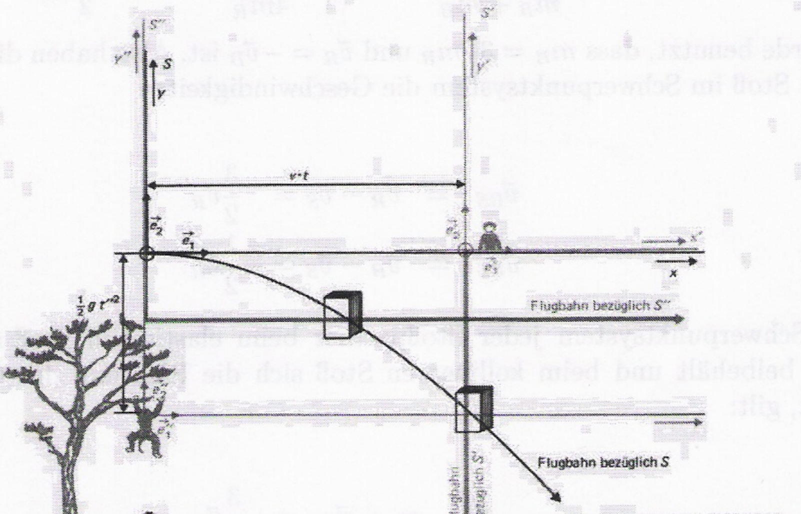
und die von ihm beobachtete Flugbahn daher

$$x = v \cdot t, \qquad y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 \tag{16}$$

Elimination von t bringt

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v^2} \tag{17}$$

Der Badegast sieht also das Buch längs einer Parabelkurve fallen.



Die Flugbahnen eines Buches, wie sie von verschiedenen Bezugssystemen aus gesehen werden.
S = Bezugssystem des Badegastes
S' = Bezugssystem des Passagiers
S'' = Bezugssystem des Affen

b.) Zur Zeit $t = 1\,\mathrm{s} = t'$ befindet sich der Schwerpunkt des Buches an der Stelle laut Passagier:

$$x' = 0\,\mathrm{m} \qquad y' = -5\,\mathrm{m} \tag{18}$$

laut Badegast:

$$x = 10\,\mathrm{m} \qquad y = -5\,\mathrm{m} \tag{19}$$

c.) Die Geschwindigkeitskomponenten sind laut Passagier:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = 0 \tag{20}$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = -gt' \tag{21}$$

laut Badegast:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = v \tag{22}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = -gt \tag{23}$$

Zur Zeit $t = 1\,\mathrm{s} = t'$ ist dann die Geschwindigkeit

laut Passagier:

$$\vec{u}' = 0 \cdot \vec{e}\,'_1 + (-10\,\mathrm{ms}^{-1})\vec{e}\,'_2 \tag{24}$$

laut Badegast:

$$\vec{u} = 10\,\mathrm{ms}^{-1}\vec{e}_1 + (-10\,\mathrm{ms}^{-1})\vec{e}_2 \tag{25}$$

$$|\vec{e}\,'_1| = |\vec{e}_1|; |\vec{e}\,'_2| = |\vec{e}_2|$$

d.) Es gilt

$$x'' = x' + v \cdot t'' \tag{26}$$

$$y'' = y' + \frac{1}{2}gt''^2 \tag{27}$$

$$t'' = t' = t \tag{28}$$

Darin $x' = 0$ und $y' = -\frac{1}{2}g \cdot t^2$ eingesetzt, ergibt

$$x'' = v \cdot t, \qquad y'' = 0 \tag{29}$$

Der Affe sieht das Buch längs einer horizontalen Geraden wandern.

Wäre seine Fallhöhe z.B. nur 2 m, so würde er sehen, dass die horizontale Bewegung des Buches nach $2/\sqrt{10}$ s in eine Parabelbewegung übergeht.
(Ob sich natürlich ein Affe überhaupt dieser Dinge bewusst sein kann, ist eine andere Frage).

Aufgabe 8:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2,785 \quad \Longrightarrow \quad L' = L/\gamma = 0,36L$$

Für den ruhenden Beobachter hat der Metermaßstab also die Länge 36 cm.

Aufgabe 9:
Die Reisezeit beträgt nach Messung des Piloten:

$$T' = \frac{2L}{\gamma v} = \frac{2L}{v}\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1d = 8,64 \cdot 10^4 s \quad L : \text{Abstand Erde-Neptun}$$

Auflösen nach v ergibt:

$$v = \frac{2L}{\sqrt{T'^2 + 4L^2/c^2}} = 0,94 \cdot 10^8 m/s = 0,3c \quad \Longrightarrow \quad \gamma = 1,048$$

Also ist die Reisezeit nach Messung des Erdbeobachters:

$$T = \gamma T' = 9,05 \cdot 10^4 s = 1d + 1,15h$$