Andreas Brenneis; Rebecca Saive; Felicitas Thorne

Wellen und Spezielle Relativitätstheorie

Freitag, der 01.08.2008

Inhaltsverzeichnis

1 Mechanische Wellen

Wie wir im Abschnitt über Oszillatoren gesehen haben, kann ein Pendel seine Schwingungsenergie auf ein anderes Pendel übertragen, falls zwischen ihnen eine Kopplung (z.B. Feder) besteht. Sind mehrere Oszillatoren so aneinander gekoppelt, dass sich die Schwingungsenergie immer weiter übertragen kann, so spricht man von einer *Welle*. Eine Welle stellt also einen Energietransfer ohne gleichzeitigen Massentransfer dar. Sie ist eine zeitlich und räumlich periodische Bewegung. Ihre Ausbreitungs-/Phasengeschwindigkeit v hängt von der Stärke der Kopplung zwischen den einzelnen Oszillatoren ab.
Die Intensität I einer Welle ist proportional zum Quadrat ihrer Amplitude A und Frequenz ω.
Es gilt: $I = \frac{1}{2} v \rho A^2 \omega^2$.

1.1 Darstellung von Wellen

Die Auslenkung der Welle an einem bestimmten Ort z zu einer bestimmten Zeit t lässt sich schreiben als:

$$x(z,t) = A\cos\left[\omega(t - z/v)\right]$$

Wichtige Kenngrößen sind:

- Wellenlänge λ: Abstand zwischen zwei äquivalenten (gleich ausgelenkten) Punkten der Welle
- Wellenzahl k: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
- Wellenvektor $\vec{k}$: $\vec{k} = k \cdot \hat{n}$, wobei $\hat{n}$ die Ausbreitungsrichtung der Welle angibt.

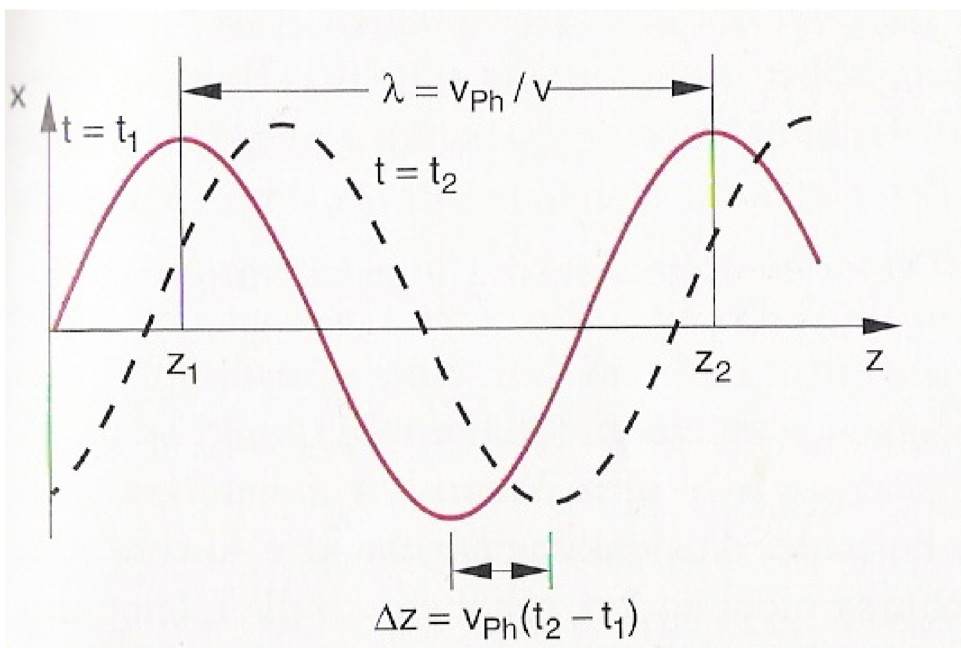

Abbildung 1: Welle

Die weiteren Kenngrößen sind äquivalent zur Schwingung. Den Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz ω, Wellenzahl k und Ausbreitungsgeschwindigkeit v gibt die *Dispersionsrelation* an. In unserem Fall gilt:

$$v = \lambda \cdot \nu = \frac{\omega}{k}$$

Ob eine beliebige Gleichung eine Welle beschreibt, lässt sich testen, indem man schaut, ob sie die allgemeine Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

erfüllt.

1.2 Verschiedene Wellentypen

Unabhängig von den weiteren Ausbreitungseigenschaften der Welle, unterscheidet man zwischen *transversalen* und *longitudinalen* Wellen. Bei transversalen Wellen werden die Oszillatoren senkrecht zur Bewegungsrichtung ausgelenkt, bei longitudinalen parallel zur Bewegungsrichtung. Ein Beispiel für eine transversale Schwingung ist die Schwingung eines Seils, das am einen Ende zu Schwingungen angeregt wird. Eine longitudinale Schwingung erhält man zum Beispiel, wenn man eine Spirale an einem Ende anschubst, so dass sich eine Welle ausbreitet.

Des weiteren spielt der Begriff der *Polarisation* besonders später bei den elektromagnetischen Wellen eine Rolle. Eine Welle heißt *linear* polarisiert, wenn alle Oszillatoren in der selben Ebene schwingen und *elliptisch* polarisiert wenn die Schwingungen das Resultat einer 2-dimensionalen Überlagerung sind.

Abhängig von Art der Ausbreitung unterscheidet man noch weiter. Die beiden wichtigsten Typen sind die
- *ebene* Welle mit der Gleichung $x(t,z) = A\cos(\omega t - kz)$ bzw. $x(t,z) = Ae^{i(\omega t - kr)}$
und die
- *Kugelwelle* mit der Gleichung $x(t,r) = A/r\cos(\omega t - kr)$ bzw $x(t,r) = A/re^{i(\omega t - kz)}$.

1.3 Überlagerung von Wellen

Für die Überlagerung von Wellen gilt das Superpositionsprinzip, das heißt sie können mathematisch durch das Addieren der einzelnen Auslenkungen ausgedrückt werden. Wenn sich zwei Wellen mit selber Frequenz überlagern, die an jedem Ort eine zeitlich konstante Phasendifferenz aufweisen, so sind diese Wellen *kohärent*. Kohärenz ist die Bedingung für stationäre *Interferenz*. Abhängig von der Phasendifferenz, sieht die Überlagerung an verschiedenen Orten unterschiedlich aus. Man unterscheidet zwei Extremfälle:

a) *Konstruktive* Interferenz (maximale Verstärkung)

Die Phasendifferenz ist ein geradzahliges Vielfaches von π:
$\Delta\phi = 2n\pi$, $n = 0, 1, 2...$

b) *Destruktive* Interferenz (Auslöschung)

Die Phasendifferenz beträgt ein ungeradzahliges Vielfaches von π:
$\Delta\phi = (2n+1)\pi$, $n = 0, 1, 2...$

Überlagert man unendlich viele harmonische Wellen, so erhält man eine *Wellengruppe* bzw. *Wellenpaket*. Die *Gruppengeschwindigkeit* v_G, ist diejenige Geschwindigkeit mit der sich das Maximum (Schwerpunkt) des Wellenpakets bewegt.

$$v_G = \frac{d\omega}{dk}$$

Sie darf nicht mit der Phasengeschwindigkeit v der einzelnen Wellenkomponenten verwechselt werden, die sich aus $v = \omega/k$ berechnet und für alle Teilwellen unterschiedlich sein kann.

1.4 Beugung, Reflexion und Brechung

An Begrenzungen und Übergängen zwischen unterschiedlichen Medien ändern sich die Bewegungseigenschaften der Welle. Insbesondere verändert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit und es kommt zu einem *Brechungswinkel*, was sich mit dem *Huygensschen Prinzip* verstehen lässt.

Huygenssches Prinzip: Jeder Punkt einer Wellenfront ist Ausgangspunkt einer elementaren Kugelwelle. Die Wellenfront ergibt sich nach dem Superpositionsprinzip als Überlagerung aller Kugelwellen.

Damit folgt für die Reflexion: Einfallwinkel gleich Ausfallwinkel

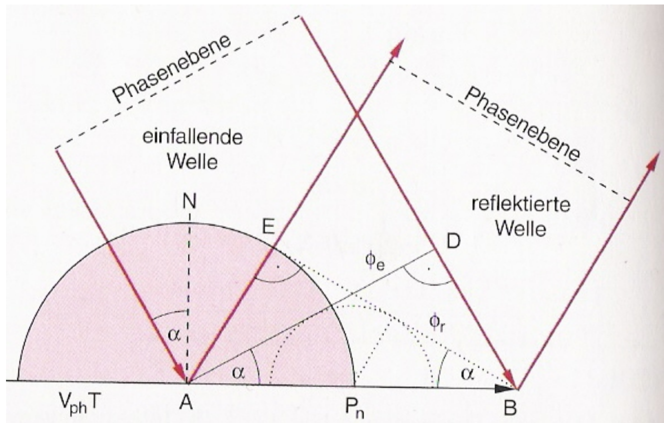

Abbildung 2: Reflexion mit Huygensschem Prinzip

Für die Brechung gilt das *Snelliussche Brechungsgesetz*, das sich aus dem Huygensschen Prinzip unter Beachtung der unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten ableiten lässt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

α: Einfallswinkel, β: Brechungswinkel, v_1: Ausbreitungsgeschwindigkeit im ersten Medium, v_2: Ausbreitungsgeschwindigkeit im zweiten Medium.

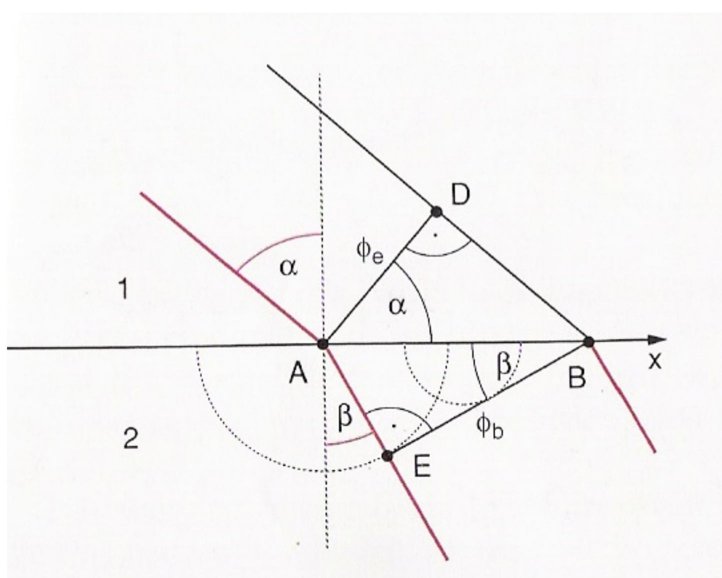

Abbildung 3: Brechung mit Huygensschen Prinzip

1.5 Stehende Wellen

Bei geeigneter Überlagerung laufender Wellen kann es zu einem räumlich stationären Schwingungsmuster kommen. Dies ist zum Beispiel durch Reflexion und anschließender Überlagerung der ein- und auslaufenden Welle möglich. Im Gegensatz zur laufenden Welle breiten sich die Maxima nicht aus, sondern schwingen ortsfest. Es wird also auch keine Energie übertragen.

Wenn die Welle an einem *festen* Ende reflektiert wird, tritt ein Phasensprung von π auf und die Überlagerung ergibt am Ende einen *Knoten*. Wenn sie an einem *freien* Ende reflektiert wird, so gibt es keinen Phasensprung und die Welle hat am Ende einen *Bauch*.

Die Gleichung für eine ebene stehende Welle ergibt sich indem man zwei entgegengesetzte Wellen addiert zu:

$$x(t,z) = 2A\cos\left(kz - \frac{\phi}{2}\right)\cdot\cos\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

Stehende Wellen treten auf einem begenzten Wellenträger der Länge l (z.B. Orgelpfeife) nur auf, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: $(n = 0, 1, 2...)$

-Für einen Wellenträger mit einem festen und einem freien Ende: $\lambda_n = 4l/(2n+1)$
-Für einen Wellenträger mit zwei festen oder zwei freien Enden: $\lambda_n = 2l/(n+1)$

Das heißt, nur bei bestimmten (Eigen-)Frequenzen, können sich stehende Wellen ausbilden. Man spricht bei der niedrigsten Frequenz von Grundschwingung, bei der nächst höheren von erster Oberschwingung usw..

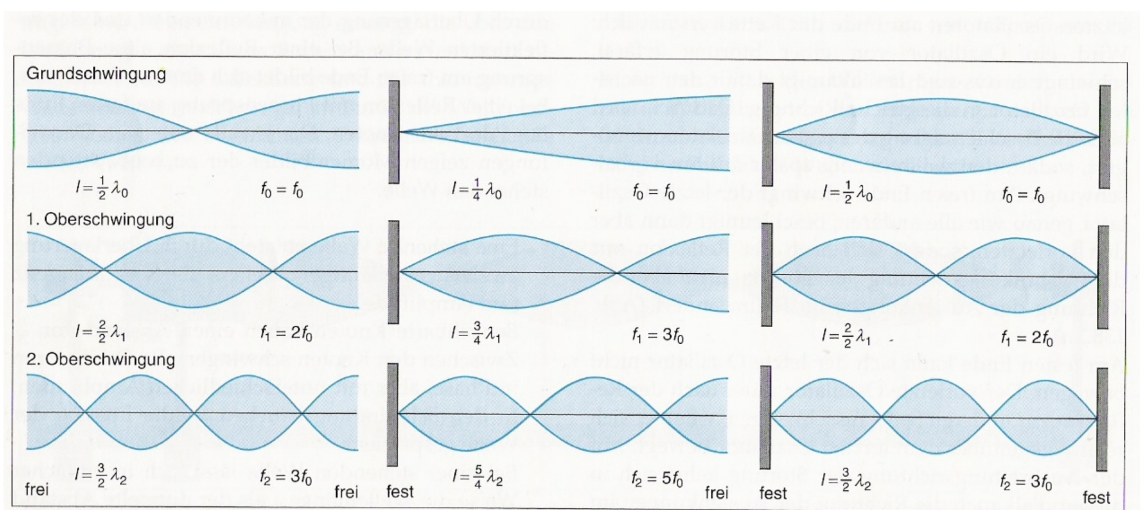

Abbildung 4: Eigenschwingungen eines Wellenträgers

1.6 Doppler-Effekt

Jeder kennt das Phänomen, dass sich das Martinshorn eines vorbeifahrenden Feuerwehrautos beim auf einen Zufahren anders (für die Musiker unter uns „heller“) anhört, als wenn es von einem wegfährt. Man spricht vom Doppler-Effekt und unterscheidet 3 Fälle:

a) bewegter Sender, ruhender Empfänger

Bewegt sich der Sender relativ zum Empfänger mit einer Geschwindigkeit u_Q, so werden die Wellenberge und Wellentäler in Bewegungsrichtung zusammen „geschoben“ und entgegengesetzt der Bewegungsrichtung auseinander „gezogen“. Der Empfänger misst also eine andere Wellenlänge, nämlich $\lambda = \lambda_0 \mp u_Q T$. Damit ergibt sich für die Frequenz:

$$\nu = \nu_0 \frac{1}{1 \mp u_Q/v}$$

Wobei „-“ für Annähern und „+“ für Entfernen steht.

b) ruhender Sender, bewegter Empfänger

Auch wenn der Beobachter sich mit einer Geschwindigkeit u_B bewegt, nimmt er eine andere Frequenz wahr, als sie vom Sender emittiert wird, nämlich:

$$\nu = \nu_0 \left(1 \pm \frac{u_B}{v}\right)$$

„+“ steht diesmal für Annähern und „-“ für Entfernen.

c) bewegter Sender und Empfänger

Bewegen sich sowohl Sender als auch Empfänger aufeinander zu oder voneinander weg, so gilt:

$$\nu = \nu_0 \frac{1 \pm u_B/v}{1 \mp u_Q/v}$$

Das obere Zeichen gilt, wenn sie sich aufeinander zu bewegen, das untere, wenn sie sich voneiander wegbewegen.

Für eine ganz allgemeine Bewegung des Senders und Empfängers relativ zum Wellenvektor $\vec{k}$ gilt:

$$\omega = \omega_0 \frac{\omega_0 - \vec{k}\vec{u}_B}{\omega_0 + \vec{k}\vec{u}_Q}$$

2 Bewegte Bezugssysteme und Spezielle Relativitätstheorie

2.1 Galilei-Transformation

Sitzt man in einem Auto, das sich mit bekannter Geschwindikeit $\vec{u}$ bewegt, und beobachtet einen Zug, der neben einem herfährt und langsam überholt wird, so muss zur Beschreibung der Bewegung des Zuges im ruhenden Bezugssystem eine Galilei-Transformation durchgeführt werden. In unserem Bezugssystem S' messen wir die Geschwindigkeit v' und die Ortskoordinate r'. Für die Geschwindigkeit v und die Ortskoordinate r im ruhenden Bezugssystem S gilt mit den Galilei-Transformationen:

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{u}\ t$$

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{u}$$

$$\Longrightarrow \vec{a} = \vec{a'}\ und\ \vec{F} = \vec{F'}$$

$$t = t'$$

Wichtig ist hierbei, dass die Kräfte und Beschleunigungen in beiden Bezugssystemen gleich sind. Das heißt, ein Beobachter in S kann die Bewegung physikalisch äquivalent zu einem Beobachter aus S' beschreiben. Dies gilt nur für Systeme, die zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegt sind. Solche Systeme nennt man *Intertialsysteme*. Inertialsysteme sind für die Beschreibung physikalischer Gesetze äquivalent. Insbesondere kann man in einem Inertialsystem ohne „Blick nach außen“ nicht erkennen, ob man sich bewegt, da die Newtonschen Gesetze genauso gelten. In einem Zug mit konstanter Geschwindigkeit ohne Fenster weiß man also nicht, ob er sich bewegt. (Okay, wenn er nicht so rappeln würde ;-))

2.2 Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Bezugssystemen gleich, unabhängig von deren Relativgeschwindigkeit zur Lichtquelle.

2.3 Lorentztransformation

Die Lorentztransformation erweitert die Galilei-Transformation für große Geschwindigkeiten, indem sie die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit berücksichtigt. Die Zusammenhänge zwischen den Bewegungsgrößen r' und v' im mit der Geschwindigkeit $\vec{u} = u\ \vec{e_x}$ bewegten System S' und denen im unbewegten System S (r und v) ergeben sich zu:

$$x' = \gamma(x - ut)$$
$$t' = \gamma(t - ux/c^2)$$

$$x = \gamma(x' + ut')$$
$$t = \gamma(t' + ux'/c^2)$$

$$y = y'$$
$$z = z'$$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x u/c^2}$$
$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - v_x u/c^2)}$$
$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - v_x u/c^2)}$$

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + v'_x u/c^2}$$
$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 + v'_x u/c^2)}$$
$$v_z = \frac{v'_z}{\gamma(1 + v'_x u/c^2)}$$

mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

2.4 Längenkontraktion

Aus den Lorentztransformationen folgt, dass ein ruhender Beobachter ein bewegtes Objekt verkürzt sieht. Die Länge, die der ruhende Beobachter misst, sei $L = x_2 - x_1$. Die Ruhelänge, die das Objekt in seinem eigenen System besitzt, ergibt sich unter Verwendung der Lorentztransformationen zu:
$L' = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - ut_2) - \gamma(x_1 - ut_1) = \gamma(x_2 - x_1)$
Es gilt also $L' = \gamma L$ und damit $L < L$, da $\gamma > 1$.

Wichtig: Die Verkürzung erfolgt nur in Bewegungsrichtung, das bewegte Objekt wirkt also auf den Beobachter nur in einer Dimenion verkürzt. Sie ist außerdem unabhängig vom Vorzeichen der Geschwindigkeit, mit der sich das Objekt bewegt.

2.5 Zeitdilatation

Wir betrachten wieder zwei zueinander bewegte Inertialsysteme S uns S'. Im ruhenden System S werden im zeitlichen Abstand $\Delta t = t_2 - t_1$ zwei Lichtsignale ausgesendet. Aus den Lorentztransformationen erhält man die im System S gemessene Zeitdifferenz zwischen den beiden Lichtsignalen im im System S' zu:
$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - ux/c^2) - \gamma(t_1 - ux/c^2) = \gamma \Delta t$$

Ein Beobachter aus S', der sich ja relativ zu S und damit auch relativ zur verwendeten Uhr bewegt, interpretiert dieses Ergebnis so: Bewegte Uhren laufen langsamer.

3 Quellen

[1] Metzler Physik, Schroedel Verlag, 3. Auflage

[2] Demtröder Experimentalphysik 1, Springer Verlag, 3. Auflage