Musterlösung zur Übung am Donnerstag

Aufgabe 1:

Strategie:
1. Man nimmt einen beliebigen Massepunkt m (z.B. Stein), hängt ihn an die Feder und lenkt die Feder aus. Man misst die Schwingungsfrequenz (bzw. die Periodendauer) und kann daraus die Masse berechnen, wegen

$$T = 2\pi\sqrt{m/D}$$

2. Man kennt nun die Masse und kann aus der Auslenkung der Feder die Gravitationsbeschleunigung berechnen:

$$m \cdot g* = D\Delta x$$

Bei bekanntem Radius R erhält man daraus für die Masse des Planeten:

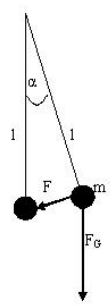
$$M = \frac{R^2 \cdot g*}{\gamma} \quad \text{mit} \quad \gamma = \text{Gravitationskonstante}$$

$$\Longrightarrow \quad M = \frac{R^2 4\pi^2 \Delta x}{T^2}$$

Aufgabe 2:

Für die rücktreibende Kraft F gilt:

$$F = F_G \sin\alpha = mg\sin\alpha$$



Für das rücktreibende Drehmoment also:

$$D_R = \frac{mg}{l}\sin\alpha$$

Die Bewegungsgleichung lautet:

$$m\ddot{\alpha} + \frac{mg}{l}\sin\alpha = 0$$

Für kleine α lässt gilt $\sin\alpha \approx \alpha$ und die Bewegungsgleichung wird zu:

$$m\ddot{\alpha} + \frac{mg}{l}\alpha = 0$$

Diese Gleichung besitzt die allgemeine Lösung:

$$\alpha(t) = A\cos\omega t \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Da am Äuqator eine größere Zentrifugalkraft herrscht als am Nordpol, wird dort die Gravitationskraft etwas abgeschwächt. Daher schwingt das Pendel am Nordpol schneller.

Aufgabe 3:

a):
Würde der Neigungswinkel 90° betragen, so hätten wir es mit einem ganz normalen Federpendel zu tun. Da aber in Aufgabenteil c) expilizit nach der α Abhängigkeit gefragt ist, werden wir diese gleich in der Bewegungsgleichung berücksichtigen. Wir setzten daher $x = 0$ an den Ort, an dem sich das Drahtende befindet, wenn die Masse noch nicht angehängt wurde, beschreiben also den Zustand der ungespannten Feder. Insgesamt ergibt sich dann für die Bwegungsgleichung des Systems unter Vernachlässigung der Reibung

$$m\ddot{x} = -(kx + mg\sin\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} + kx = mg\sin\alpha$$

b):
Wir wählen als Ansatz für die homogene Lösung

$$x(t) = A\sin\omega t$$

Ableiten und Einsetzen in die homogene Lösung liefert

$$-m\omega^2\sin\omega t + k\sin\omega t = 0$$

und damit durch Koeffizientenvergleich

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\Longrightarrow \quad k = \omega^2 \cdot m = (2\pi \cdot 10\text{Hz})^2 \cdot 1\text{kg} = 3947{,}8\text{N/m} \approx 4\text{kN/m}$$

c):
Die Eigenfrequenz hängt nicht vom Winkel α ab. Die Ruhelage allerdings schon. Wer's nicht glaubt, löst einfach die inhomogene DGL. Eine spezielle Lösung x_s lautet

$$x_s = \frac{-mg\sin\alpha}{k}$$

und damit die vollständige Lösung der DGL:

$$x(t) = A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{mg\sin\alpha}{k}$$

N.B.: Lasst Euch nicht verwundern, dass jetzt hier bei einer inhomogenen DGL zweiter Ordnung die „vollständige Lösung" nur aus einer Linearkombination von zwei Termen besteht. Mathematisch korrekt hätte man oben natürlich eine Linearkombination aus Sinus und Kosinus, bzw. eine Phase oder einen e-Funktion Ansatz verwenden müssen. Da wir aber unsere Anfangsbedingung einfach so wählen können, dass es passt (also zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ keine Phasenverscheibung), ist dies hier die vollständige Lösung. Wir haben also implizit schon die Randbedingungen eingearbeitet.

Aufgabe 4:

Die Palme wird durch eine Kraft F=1000 N um s=4 m ausgelenkt. Damit ergibt sich die Federkonstante D der Palme zu

$$D = \frac{F}{s} = \frac{1000N}{4m} = 250N/m$$

Für die Kreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung gilt bekanntlich

$$\omega_0^2 = \frac{D}{m}$$

Also in unserem Fall

$$\omega_0^2 = \frac{250N/m}{2000kg} = 0,125Hz^2$$
$$\Leftrightarrow \ \omega_0 = 0,3536Hz$$

Aufgund der angegeben Maximalamplituden ergibt sich mit der Gleichung

$$x(t) = A \cdot e^{-\gamma t} \cos \omega t$$

für γT (T=Periodendauer) die Beziehung:

$$\gamma T = \ln 4/3 \approx 0,28768$$

Aus der Vorlesung ist für den Fall der gedämpften Schwingung bekannt

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

Außerdem gilt

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Gleichsetzten liefert

$$\omega_0^2 - \gamma^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$$
$$\Rightarrow \ T = \sqrt{\frac{4\pi^2 + (\gamma T)^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 + (\ln 4/3)^2}{1/8Hz^2}} = 17,79s$$

Und damit für Aufgabenteil

a):

$$\gamma = \frac{\ln 4/3}{T} = 0,01617Hz$$

b):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 0,3532Hz$$

Aufgabe 5:

a):
Zmeimaliges Ableiten von $x(t) = \frac{f_0 t}{2\omega}\sin\omega t$ liefert

$$\dot{x}(t) = \frac{f_0}{2\omega}\sin\omega t + \frac{f_0 t}{2}\cos\omega t$$
$$\ddot{x}(t) = \frac{f_0}{2}\cos\omega t + \frac{f_0}{2}\cos\omega t - \frac{f_0 t\omega}{2}\sin\omega t = f_0\cos\omega t - \frac{f_0 t\omega}{2}\sin\omega t$$

Einsetzten in die Schwingungsgleichung:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_0\cos\omega t - \frac{f_0 t\omega}{2}\sin\omega t + \frac{f_0 t\omega}{2}\sin\omega t = f_0\cos\omega t$$

$x(t)$ erfüllt also die Schwingungsgleichung.

b):
Mit der in a) berechneten Ableitung ergibt sich für die Energie:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{f_0}{2\omega}\sin\omega t + \frac{f_0 t}{2}\cos\omega t\right)^2 + \omega^2\left(\frac{f_0 t}{2\omega}\sin\omega t\right)\right]$$

$$= \frac{mf_0^2}{8\omega^2}(\sin^2\omega t + 2t\omega\sin\omega t\cos\omega t + \omega^2 t^2\cos^2\omega t + \omega^2 t^2\sin^2\omega t)$$

$$= \frac{mf_0^2}{8\omega^2}(\sin^2\omega t + 2t\omega\sin\omega t\cos\omega t + \omega^2 t^2)$$

Es ist also ein quadratisches Anwachsen überlagert mit oszillierenden Anteilen. Mittelt man die oszillierenden Anteile über eine Periode T, so erhält man:

$$\int_0^T 2t\sin\omega t\cos\omega t dt = \int_0^T t\sin 2\omega t = -\frac{T}{2\omega}$$

$$\int_0^T \sin^2\omega t = \frac{T}{2}$$

Insgesamt also

$$\overline{E} = \frac{1}{T}\int_0^T E(t)dt = \frac{1}{T}\frac{mf_0^2}{8\omega^2}\left(\frac{T}{2} - \omega\frac{T}{2\omega} + \omega^2 t^2\right)$$
$$= \frac{mf_0^2}{8}t^2$$

Beachte: In der oberen Gleichung wurden nur die oszillierenden Anteile über eine Periode gemittelt!

c):
Die allgemeine Lösung der homogenen DGL $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ lautet bekanntlich $x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$. Mit der angegebenen speziellen Lösung lautet die allgemeine Lösung:

$$x(t) = \frac{f_0 t}{2\omega}\sin\omega t + a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

Aus den Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0 \implies a = 0$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \Longrightarrow \quad b = v_0/\omega$$

Insgesamt also die gesuchte Lösung

$$x(t) = \left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{f_0 t}{2\omega}\right) \sin \omega t$$

Aufgabe 6:

a):

x bezeichne im Folgenden die Auslenkunk der Wassersäule relatib zur Ruhelage; A ist der Querschnitt, l die Länge und damit $Al = 20\text{cm}^3$ das Volumen. Die Pendelmasse m (Masse der Wassersäule) ist also $m = Al\rho_{H_2O}$.
Die rücktreibende Kraft ist die Gravitationskraft. Sie versucht das Pendel in die Ausgangsposition zu bringen. Es gilt: $F = -2\rho_{H_2O}Agx$. Die Kraft hängt also linear von der Auslenkung (−> harmonische Schwingung). Wir setzen also an:

$$m\ddot{x} = F$$

$$\rho_{H_2O}Al\ddot{x} = -2\rho_{H_2O}Agx$$
$$\Longrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{2g}{l}x = 0$$
$$\Longrightarrow \quad x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \phi \quad mit \quad \omega_0^2 = 2g/l$$
$$\Longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{2l/g}$$

b):

Offensichtlich ändert T sich gar nicht. Hieran sieht man auch die Äquivalenz von träger und schwerer Masse.

c):

Wir setzen

$$x_0 e^{-\gamma(t+T)} = \frac{1}{3}x_0 e^{-\gamma t} \quad \text{(cos ist periodisch in T)}$$
$$\Longrightarrow \quad e^{-\gamma T} = \frac{1}{3}$$
$$\Longrightarrow \quad \gamma = \frac{\ln 3}{T} = \frac{\ln 3}{2\pi}\omega \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$
$$\Longrightarrow \quad \gamma = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{(2\pi/\ln 3)^2 + 1}}$$

Aufgabe 7:

Nach der Schwebungsformel $x(t) = 2a \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$ muss der Ton 4 Hz höher sein, als 444 Hz. Der resultierende Ton hat eine Frequenz von 442 Hz.

Aufgabe 8:

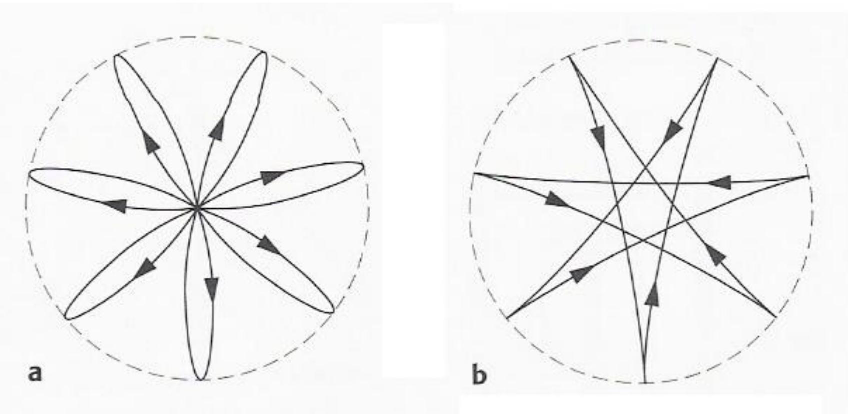
a):

Die Schwingungsbahn ist im Raum konstant, d.h. ohne Einwirkung äußerer Kräfte wird das Pendel nicht seine Schwingungsebene ändern. Wie man damit die Erdrotation nachweisen kann, kann man sich am besten vorstellen, wenn man das Pendel auf den Nordpol (oder Südpol) setzt. Es schwingt jetzt weiterhin in seiner Ebene, allerdings dreht sich die Erde unter ihm weg, so dass es für einen Beobachter auf der Erde aussieht, als ob das Pendel seine Schwingungsebene ändern würde. Da wir aber Newtons Axiome kennen, wissen wir, das Pendel ändert seine Schwingungsrichtung nicht von allein und daher müssen wir es sein, die sich drehen. Foucault führte diesen skandalösen Versuch 1851 in Paris vor und auch heute noch sieht man hin und wieder irgendwo ein solches Pendel hängen, z.B. im Deutschen Museum.

b):

Wir kennen die Geschwindigkeit der Erdrotation ω, sie ist nämlich gerade eine Umdrehung pro Tag. Wir können nun an irgendeinem Ort der Erde das Pendel aufstellen und an dem Drehwinkel ω_P der Schwingungsebene des Pendels den Breitengrad θ berechnen durch $\omega_P = \omega \sin\theta$. Ableiten kann man diese Formel, indem man sich überlegt, dass nur der Anteil der Schwingung, die senkrecht zur Erdachse steht (also die Aufhängung parallel ist) abgelenkt wird.
(In Wirklichkeit ist dieser Zusammenhang nur eine Näherung, die für kleine Winkelgeschwindigkeiten erlaubt ist, was hier aber gegeben ist (T=1d). Die genaue theoretische Herleitung ist etwas komplizierter und mehr was für Theo-Phys.) **c):**

Am Nordpol sieht die Projektion etwa so aus, wie in der Skizze. Am Äquator ist die Projektion



Pendel 3: Foucaultsches Pendel: wird das Pendel aus der Ruhelage angestoßen, so führt es auf Grund der Erdrotation Rosettenbahnen mit Schleifen durch (a), wird es aus der Lage maximaler Auslenkung losgelassen, Rosettenbahnen mit Spitzen (b).

Abbildung 0.1: Rosettenbahnen des Foucaultschen Pendels aus dem Lexikon der Physik, Spektrum Verlag

nur eine Linie.

Aufgabe 9:

Die Ruhelage sei $x = 0$. Wird er Klotz bis zur Auslenkung $x_0 > 0$ gebracht, so ist seine Potentielle Energie

$$E_{p0} = \int_0^{x_0} 2D_0 x dx = D_0 x_0^2$$

1. *Nach dem Loslassen gleitet er bis zum Umkehrpunkt $x_1$und verliert dabei die Reibungsenergie*

$$E_R = f_1 mg(x_0 - x_1) \qquad \textit{mit} \quad x_1 < 0$$

$$\Rightarrow \ D_0 x_1^2 = D_0 x_0^2 - f_1 mg(x_0 - x_1) \qquad \Rightarrow \ x_1 = \frac{f_1 mg}{D_0} - x_0 < 0$$

Für die Beträge der Auslenkungen gilt:

$$|x_1| = |x_0| - f_1 mg/D_0$$

und allgemein:

$$|x_n| = |x_{n-1}| - f_1 mg/D_0 = |x_{n-1}| - 0,059m$$
$$|x_n| = |x_0| - n f_1 mg/D_0 = |x_0| - n0,059m$$

Die Abstände $|x_n|$ der Umkehrpunkte nehmen linear *mit n ab! Die Bewegung des Klotzes ist eine gedämpfte, aber* nichtharmonische *Schwingung.*

2. *Der Klotz bleibt im n-ten Umkehrpunkt stehen, wenn dort die Rückstellkraft kleiner ist als die Haftreibungskraft.*

$$\Rightarrow \ 2D_0|x_n| < f_0 mg \quad \Rightarrow \ n > \frac{D_0 x_0}{f_1 mg} - \frac{f_0}{2f_1} = 2,3$$

D.h. der Klotz bleibt spätestens beim dritten Umkehrpunkt stecken, wenn er ihn überhaupt erreicht. Um dies zu Überprüfen, bestimmen wir seine Anfangsenergie am zweiten Umkehrpunkt:

$$E_p = D_0 x_2^2 = D_0(x_0 - 2f_1 mg/D_0)^2$$

die größer sein muss als die Reibungsenergie $f_1 mg|x_3 - x_2|$, wenn x_3 erreicht werden soll. Einsetzen der Zahlenwerte zeigt, dass $E_p(x_1) = 1,05nm$, $f_1 mg|x_3 - x_2| = 0,346Nm$ ist. D.h. x_3 wird erreicht und der Klotz bleibt bei x_3 im Umkehrpunkt stecken.