Andreas Brenneis; Rebecca Saive; Felicitas Thorne

Schwingungen

Donnerstag, der 31.07.2008

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung: Schwingungen und Wellen

Das Verständnis von Schwingungen und Wellen ist zur Beschreibung vieler Naturphänomenen sowie technischer Anwendungen wie Akustik oder Brückenbau unabdingbar. Da der mathematische Formalismus mechanischer Wellen sich direkt auch auf elektromagnetische Wellen übertragen lässt, ist es sinnvoll, sich mit diesem möglichst schnell vertraut zu machen. Schwingungsphänomene begleiten das gesamte Physikstudium, sei es in Molekülschwingungen oder Ausbreitung von Wellen in Festkörpern.

2 Harmonischer Oszillator

2.1 Freie ungedämpfte Schwingung

Für den harmonsichen Oszillator gilt das lineare Kraftgesetz (Hooksches Gesetz)

$$\vec{F} = -D\,\vec{x}$$

$\vec{F}$ ist dabei eine rücktreibende Kraft, im Falle des Fadenpendels die Gravitation. Dass die Karft rücktreibend ist, erkennt man an dem „-“.
Daraus ergibt sich die Bewegungsgleichung des Pendels zu

$$\frac{d^2\,\vec{x}}{dt^2} + \omega_0^2\,\vec{x} = 0$$

mit der Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$
Dies ist eine lineare homogene Differenzialgleichung (DGL) zweiten Grades und besitzt daher zwei linear unabhängige Lösungen der Form

$$x(t) = e^{\pm i\omega_0}$$

deren Linearkombination die allgemeine Lösung darstellt.(Wir beschränken uns im folgenden auf eine Dimension). Um eine reelle Funktion zu erhalten (alle Funktionen, die Naturphänomene direkt beschreiben, sind reell!) muss diese Linearkombination folgendermaßen aussehen:

$$x(t) = ce^{i\omega_0 t} + c^* e^{-i\omega_0}$$

Mit $c = a + ib$ und $c^* = a - ib$, a,b reell.

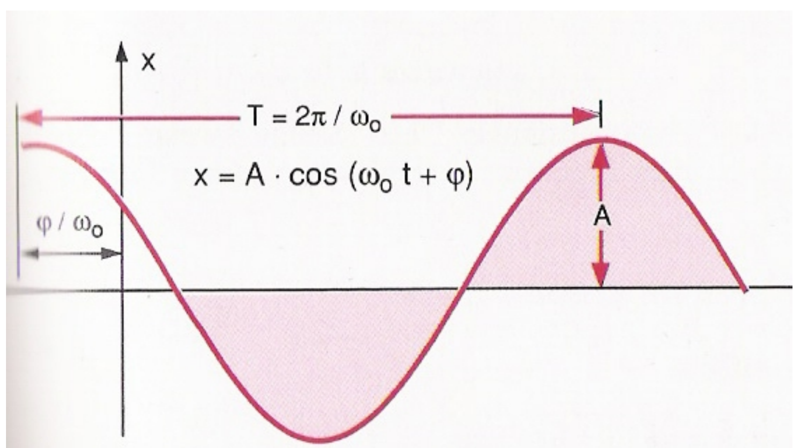

Abbildung 1: Schwingung

Formen wir diese Gleichung mit der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ um, so erhalten wir:

$$x(t) = (a+ib)\cos\omega_0 t + (a+ib)i\sin\omega_0 t + (a-ib)\cos\omega_0 t - (a-ib)i\sin\omega_0 t$$

$$= 2a\cos\omega_0 t - 2b\cos\omega_0 t = (c+c^*)\cos\omega_0 t + i(c-c^*)\sin\omega_0 t$$

Diese Funktion ist reell und erfüllt die Bewegungsgleichung, ist also unsere gesuchte Lösung.
Äquivalent ist die Schreibweise:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

mit $A = \sqrt{(c+c^*)^2 - (c-c*)^2}$ und $\tan\phi = -\frac{i(c-c^*)}{(c+c^*)}$
Physikalisch bezeichnet A die Amplitude der Schwingung (also die maximale Auslenkung), ω_0 die Kreisfrequenz und ϕ die Phase oder Phasenverschiebung. Die Zeit T, nach der das Pendel eine vollständige Schwingung durchgeführt hat, nennt man Schwingungsdauer oder Periode. Der reziproke Wert $\nu = 1/T$ wird als Schwingungsfrequenz bezeichnet. Sie gibt an, wie viele Schwingungen das Pendel in einer bestimmten Zeit durchführt. Die Einheit von ν ist Hertz ([Hz]=[1/s]). Aus der Frequenz ergibt sich die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$.

2.2 Freie gedämpfte Schwingung

Während bei der freien ungedämpften Schwingung die Reibung vernachlässigt wurde, werden wir sie nun in einem Term $-2\gamma\dot{x}$, der linear von der Geschwindigkeit abhängt, berücksichtigen. γ bezeichnet dabei die Dämpfungskonstante. Tatsächlich ist die Reibung für langsame Geschwindigkeiten proportional zur Geschwindigkeit $\dot{x}$, kann aber für große $\dot{x}$ auch von höheren Potenzen abhängen. (Sollte man beim Autofahren bedenken;-))

Wir erhalten also die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = -2\gamma\dot{x} - \omega_0^2 x$$

bzw.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung zu:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[c_1 e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t}\right]$$

Je nach Stärke der Dämpfung lassen sich nun drei verschiedene Fälle unterscheiden:

a) $\gamma < \omega_0$: schwache Dämpfung

Es ergibt sich:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi) \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

Hierbei handelt es sich um eine Kosinusschwingung mit exponentiell abfallender Amplitude. Um ein Maß für die Schnelle des Amplitudenabfalls zu bekommen, definiert man das logarithmische Dekrement δ zu $\delta = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)} = \gamma T$.

b) $\gamma > \omega_0$: starke Dämpfung

Die Exponenten der e-Funktion sind nun reell und die Lösung der Bewegungsgleichung lautet:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t}\right] \quad \text{mit} \quad \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

In diesem Fall gibt es also keine Schwingung mehr. Nach einmaliger Auslenkung näher sich das Pendel langsam seiner Ruhelage. Man spricht auch von *Kriechfall*.

c) $\gamma = \omega_0$: aperiodischer Grenzfall

Die Lösungen unserer charakteristischen Gleichung sind nun entartet. Für diesen Fall lautet die Lösung der DGL:

$$x(t) = (c_1 t + c_2)e^{-\gamma t}$$

Die Schwingung verhält sich ähnlich wie bei starker Dämpfung.

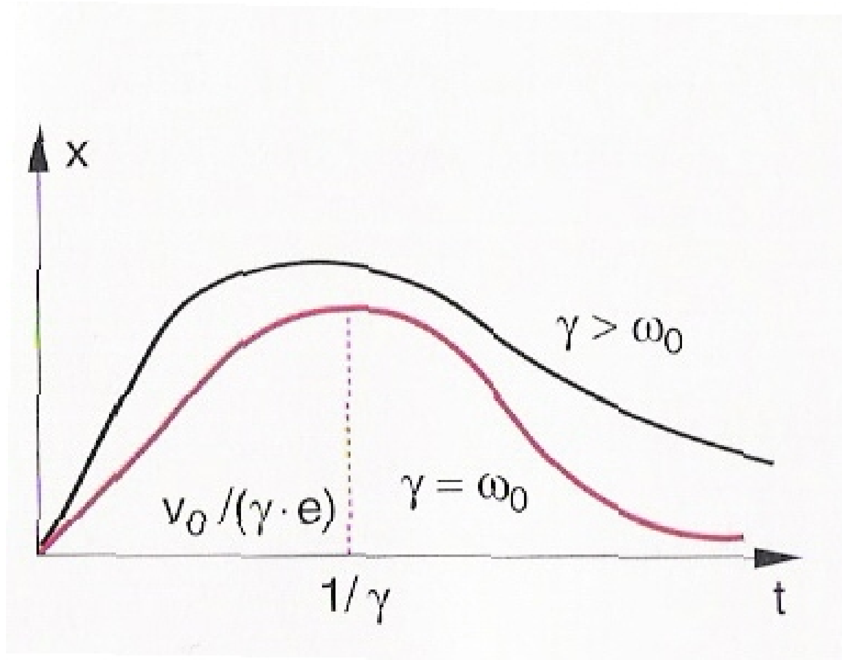

Abbildung 2: aperiodischer Grenzfall und starke Dämpfung

2.3 Erzwungene Schwingung

Wirkt auf das Pendel nun zusätlich noch eine antreibende Kraft F(t) (z.B. plötzliche Auslenkung oder kontinuierliche sinusförmige antreibende Kraft), so muss die die Bewegungsgleichung um diese Kraft ergänzt werden und wir erhalten:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

Dies ist eine lineare inhomogene DGL zweiten Grades, deren Lösung sich als Linearkombination der beiden homogenen Lösungen sowie einer speziellen Lösung ergibt. Für den Spezialfall einer kosinusförmigen antreibenden Kraft $F = Km\cos\omega t$ ergibt sich im eingeschwungenen Zustand:

$$x(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi) \quad \text{mit} \quad A_2(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

Die Amplitude wird also maximal für $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$. (Nach ω ableiten und null setzten liefert Minimum). Bei maximaler Amplitude spricht man von Resonanz.

2.4 Überlagerung von Schwingungen

Überlagern sich zwei oder mehrere Schwingungen, kann es zu sehr interessanten Effekten kommen. Unser Gehör ist diesen Effekten jeden Tag ausgesetzt, denn Geräusche die von unterschiedlichen Quellen verursacht werden, führen zu einer Luftdruckschwingung, die gerade die Überlagerung aller dieser Geräusche darstellt.
Mathematisch ist eine Überlagerung nichts anderes als die Addition aller Schwingungsgleichungen.

$$x(t) = \sum_n x_n(t) = \sum_n a_n cos(\omega_n t + \phi_n)$$

Wobei a_n die Amplitude, ϕ_n die Phase und ω_n die Kreisfrequenz bezeichnet.

Überlagert man zwei Schwingungen mit **gleicher Frequenz** aber unterschiedlicher Phase und Amplitude,

$$x_1(t) = a\cos(\omega t + \phi_1)$$

$$x_2(t) = b\cos(\omega t + \phi_2)$$

so ergibt sich unter Verwendung von Additionstheoremen:

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t + \phi)$$

mit $A = a\cos\phi_1 + b\cos\phi_2$, $B = -a\sin\phi_1 - b\sin\phi_2$ und $tan\phi = -B/A$.

Haben beide Schwingungen die gleiche Phase, so Überlagern sie sich *konstruktiv*, das heißt, die Amplituden addieren sich gerade und die resultierende Phase ist die Phase der beiden Ausgangsschwingungen. Bei einer Phasendifferenz von π löschen sie sich gerade aus *(destruktive Überlagerung)*. Bei allen anderen Phasen kommt es nach obiger Gleichung zu einer neuen Kosinusschwingung mit einer Amplitude kleiner a+b und oben beschriebener Phase.

Wir betrachten nun eine Überlagerung von zwei Schwingungen mit **unterschiedlicher Frequenz** aber gleicher Amplitude und Phase:

$$x_1 = a\cos\omega_1 t$$
$$x_2 = a\cos\omega_2 t$$

Wegen $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ergibt sich als resultierende Schwingung:

$$x(t) = 2a\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t \cdot \cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t$$

Für wenig voneinander abweichende Frequenzen beschreibt der erste Kosinusterm eine langsame Schwingung (Einhüllende) mit einer Frequenz, die der halben Differenz der beiden ursprünglichen Frequenzen entspricht. Der zweite Kosinusterm beschreibt eine Schwingung mit der mittleren Frequenz. Überlagert man Töne auf diese Art und Weise, nimmt man einen an- und abschwillenden Ton war. Man spricht von einer *Schwebung*.

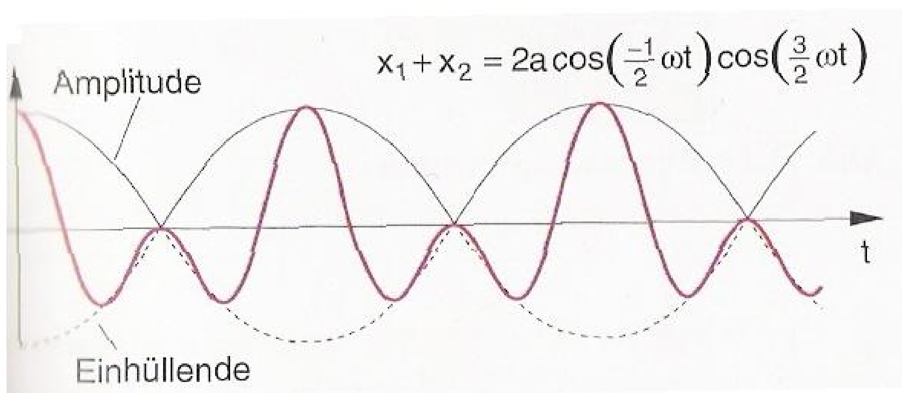

Abbildung 3: Schwebung

Überlagert man Schwingungen in **zwei Dimensionen**, so erhält man die so genannten *Lissajous-Figuren*.

2.5 Energiebilanz der Schwingung eines Massepunktes

Die kinetische Energie des harmonischen Oszillators ist:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2\omega_0 t$$

Mit dem Mittelwert:

$$\overline{E_{kin}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}m\dot{x}^2 dt = \frac{1}{4}mA^2\omega_0^2$$

Für die potentielle Energie gilt:

$$E_p = \int_0^x F dx = \frac{1}{2}DA^2 \cdot \cos^2\omega_0 t$$

Mit dem Mittelwert:

$$\overline{E_p} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}Dx^2 dt = \frac{1}{4}mA^2\omega_0^2$$

Zu jedem Zeitpunkt ist die Summe aus potentieller und kinetischer Energie erhalten.

2.6 Gekoppelte Pendel

Auch gekoppelte Pendel spielen in der Natur eine wichtige Rolle. Wie wir später sehen werden, ist eine Welle nichts anderes als eine Reihe gekoppelter Pendel, die ihre Energie jeweils auf den Nachbarn übertragen. Wir betrachten in diesem Kapitel zunächst den einfachen Fall von zwei gekoppelten Federpendeln. Die Bewegungsgleichungen müssen nun für beide Massepunkte einzeln aufgestellt werden. Dadurch, dass sich die Bewegungen gegenseitig beeinflussen, kommt es zu gekoppelten DGLs.

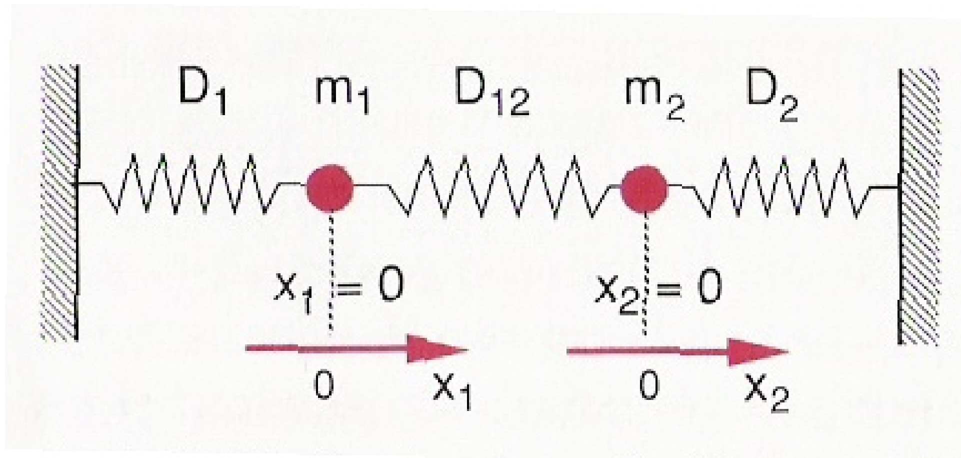

Abbildung 4: gekoppelte Ferderpendel

Wir bezeichnen die Koordinate der ersten Masse m_1 mit x_1 und die der zweiten Masse m_2 mit x_2. Die Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$m_1\ddot{x_1} = -D_1 x_1 - D_{12}(x_1 - x_2)$$

$$m_2\ddot{x_2} = -D_2 x_2 - D_{12}(x_2 - x_1)$$

Für gleiche Massen und gleiche Federkonstanten lässt sich dieses System leicht durch eine geschickte Koordinatentransformation entkoppeln. Indem wir die Gleichungen einmal addieren und einmal voneinander abziehen, erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$m(\ddot{x_1} + \ddot{x_2}) = -D(x_1 + x_2)$$

$$m(\ddot{x_1} - \ddot{x_2}) = -D(x_1 - x_2) - 2D_{12}(x_1 - x_2)$$

Durch die Substitution $\xi^+ = 1/2(x_1 + x_2)$ und $\xi^- = 1/2(x_1 - x_2)$ ergeben sich die einfachen entkoppelten DGLs

$$m\ddot{\xi^+} = -D\xi^+$$

$$m\ddot{\xi^-} = -(D + 2D_{12})\xi^-$$

mit den Lösungen:

$$\xi^+(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad \text{mit} \quad \omega_1^2 = D/m$$

$$\xi^-(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad \text{mit} \quad \omega_2^2 = (D + 2D_{12})/m$$

Für gleiche Amplituden $A_1 = A_2 = A$ lassen sich diese Gleichungen zurücktransformieren und wir erhalten:

$$x_1 = (\xi^+ + \xi^-) = A\left[\cos(\omega_1 t + \phi_1) + \cos(\omega_2 t + \phi_2)\right]$$

$$= 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$$

$$x_2 = (\xi^+ - \xi^-) = A\left[\cos(\omega_1 t + \phi_1) - \cos(\omega_2 t + \phi_2)\right]$$

$$= 2A\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$$

3 Quellen

[1] Metzler Physik, Schroedel Verlag, 3. Auflage

[2] Demtröder Experimentalphysik 1, Springer Verlag, 3. Auflage