Andreas Brenneis
Rebecca Saive
Felicitas Thorne

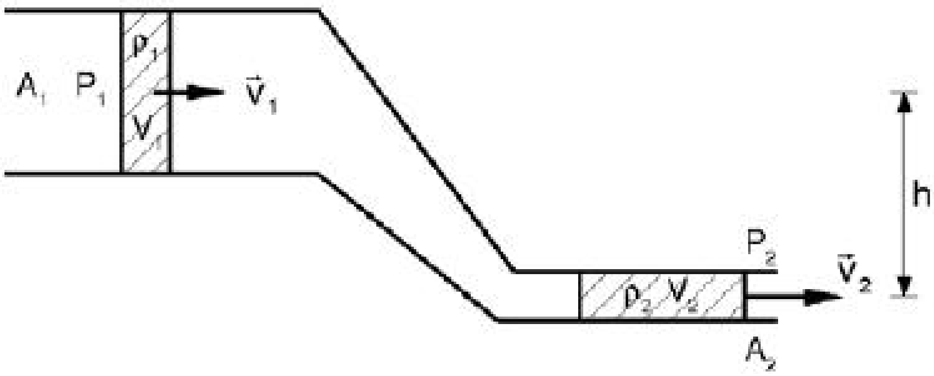
Musterlösungen zu den Übungsaufgaben für Mittwoch, den 30. Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Hydrodynamik

1.1 Aufgabe 1

a)



b) Aus der Kontinuitätsgleichung folgt, dass in gleichen Zeiten gleiche Massen durch die beiden Querschnittsflächen A_1 und A_2 fließen. Da es sich um eine inkompressible Flüssigkeit handelt treten im jeweiligen horizontalen Rohrabschnitt keine Gradienten in der Geschwindigkeit auf. Ist Δm_1 das Massenelement, welches im Zeitintervall Δt im Rohrabschnitt mit Fläche A_1 fließt und ist Δm_2 das entsprechende Massenelement im Rohrabschnitt mit Fläche A_2, so gilt

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m$$

Mit $\Delta m_i = \rho\, \Delta V_i$ folgt

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V\,.$$

Wir betrachten jetzt die Energiebilanz:

Für die Änderung der kinetischen Energie gilt

$$\Delta E_{kin} = E_{kin_2} - E_{kin_1} = \frac{1}{2}\,\Delta m_2\, v_2^2 - \frac{1}{2}\,\Delta m_1\, v_1^2 = \frac{1}{2}\,\rho\,\Delta V\,(v_2^2 - v_1^2)\,.$$

Für die Änderung der potenziellen Energie bei Durchlaufen der Höhe $h = y_1 - y_2$ gilt

$$\Delta E_{pot} = E_{pot_2} - E_{pot_1} = \Delta m_2\, g\, y_2 - \Delta m_1\, g\, y_1 = \rho\,\Delta V\; g\,(y_2 - y_1) = -\rho\,\Delta V\; g\, h\,.$$

An den beiden Rohrenden liegt der Druck P_1 bzw. P_2 an. Bei Verschieben des Volumenelements ΔV um Δx entlang des Rohres wird die Arbeit $F_i \cdot \Delta x$ mit $F_i = P \cdot A_i$ verrichtet. Für die Bilanz der durch den Druck verrichteten Arbeit gilt

$$\Delta W = W_2 - W_1 = P_2\, A_2\, \Delta x - P_1\, A_1\, \Delta x = \Delta V(P_2 - P_1)\,,$$

da $A_i\, \Delta x = \Delta V$. Wir stellen nun die Gesamtbilanz der verrichteten Arbeit und der Energieänderung auf

$$\Delta W + \Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} = 0\,.$$

Folglich gilt

$$\Delta V\,(P_2 - P_1) = -\frac{1}{2}\,\rho\,\Delta V\,(v_2^2 - v_1^2) + \rho\,\Delta V\,g\,h$$

$$P_2 + \frac{1}{2}\,\rho\,v_2^2 + \rho\,g\,y_2 = P_1 + \frac{1}{2}\,\rho\,v_1^2 + \rho\,g\,y_1\,.$$

Damit ergibt sich die Bernoulli Gleichung zu

$$P + \frac{1}{2}\,\rho\,v^2 + \rho\,g\,y = konst.$$

c) Wir betrachten nun den Grenzfall einer ruhenden Flüssigkeit. Es gilt also $v = 0$. Dann reduziert sich die Bernoulligleichung zu

$$P + \rho\,g\,y = konst.$$

Folglich gilt

$$P_1 + \rho\,g\,y_1 = P_2 + \rho\,g\,y_2$$

$$\rho\,g\,h = P_2 - P_1 \quad \text{mit} \quad h = y_1 - y_2$$

also

$$h = \frac{\Delta P}{\rho\,g}$$

d) Der andere Grenzfall für große Geschwindigkeiten der Flüssigkeit. Groß meint hier, dass gilt

$$h \ll v\,.$$

Dies ist z. B. der Fall für ein horizontales Rohr. Die Bernoulligleichung reduziert sich dann zu

$$P + \frac{1}{2}\,\rho\,v^2 = konst.$$

Also gilt

$$P_1 + \frac{1}{2}\,\rho\,v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\,\rho\,v_2^2$$

$$\Delta P = \frac{1}{2}\,\rho\,(v_1^2 - v_2^2)\,,$$

wobei ΔP analog zu Teilaufgabe b) definiert ist.

1.2 Aufgabe 2

a) Bei der im Rohr strömenden Flüssigkeit handelt es sich um eine inkompressible Flüssigkeit ($\rho = konst.$). Aus der Kontinuitätsgleichung folgt, dass in gleichen Zeiten gleiche Massen durch die beiden Rohrquerschnittsflächen fließen, also

$$\rho\, A\, v_A = \rho\, a\, v_a\,.$$

Daraus folgt

$$v_a = \frac{A}{a}\, v_A\,.$$

Für das von Flüssigkeit durchströmte horizontale Rohr mit den Querschnittsflächen A und a betrachtet man die Bernoulli Gleichung im Grenzfall $\rho\, g\, \Delta y = 0$. Folglich gilt

$$P_A + \frac{1}{2}\,\rho\, v_A^2 = P_a + \frac{1}{2}\,\rho\, v_a^2\,.$$

Die Bernoulligleichung für die im Venturi Rohr strömende Flüssigkeit lautet unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned} P_A - P_a = \delta P \; &= \tfrac{1}{2}\,\rho\, v_a^2 - \tfrac{1}{2}\,\rho\, v_A^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\,\rho\, v_A^2 \left(\frac{A^2}{a^2} - 1\right) = \tfrac{1}{2}\,\rho\, v_A^2 \left(\frac{A^2 - a^2}{a^2}\right)\,. \end{aligned}$$

Es folgt

$$v_A = a\sqrt{\frac{2\delta P}{\rho\,(A^2 - a^2)}}\,.$$

b) Mit den in der Aufgabenstellung angegebenen Werten berechnet sich die Geschwindigkeit der im Venturi Rohr im Rohrteil mit Durchmesser A strömenden Flüssigkeit zu

$$v_A = 45\,\mathrm{cm}^2 \cdot \sqrt{\frac{2\,(59-43)\;\mathrm{kPa}}{1003\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot (81^2 - 45^2)\;\mathrm{cm}^4}} = 3.77\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

Für den Volumenstrom gilt

$$\frac{dV}{dt} = A \cdot v_A = 81\,\mathrm{cm}^2 \cdot 3.77\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 0.0305\,\mathrm{m^3\,s^{-1}} = 1832\,\mathrm{l\,min^{-1}}\,.$$

c) Im mit Quecksilber gefüllten u-förmigen Schenkel verwendet man die Bernoulli Gleichung für den Grenzfall einer ruhenden Flüssigkeit ($v = 0$). Es gilt

$$P_A + \rho_Q\, g\, y_A = P_a + \rho_Q\, g\, y_a\,.$$

Mit $y_a - y_A = h$ folgt

$$P_A - P_a = \rho_Q\, g\, h\,,$$

wobei ρ_Q die Dichte von Quecksilber bezeichnet. Mit δP aus Teilaufgabe a) läßt sich die Formel nach h zu folgendem Resultat auflösen

$$h = \frac{\delta P}{\rho_Q\, g} = \frac{16\,\mathrm{kPa}}{9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 13546\,\mathrm{kg\,m^{-3}}} = 0.12\,\mathrm{m} = 12\,\mathrm{cm}\,.$$

1.3 Aufgabe 3

a) Kraftansatz

$$F = m_s \ddot{z} = F_g + F_A + F_R$$
$$= m_s g - m_{OTP} g - 6\pi\,\eta\, r_s\, v$$
$$\Rightarrow \quad m_s \ddot{z} = (\rho_s - \rho_{OTP}) \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d_s}{2}\right)^3 g - 6\pi\,\eta\,\frac{d_s}{2}\,\dot{z}$$

b) Umschreiben der Differentialgleichung auf die Geschwindigkeit v in z - Richtung.

$$m_s \dot{v} = (\rho_s - \rho_{OTP})\,\frac{4}{3}\pi \left(\frac{d_s}{2}\right)^3 g - 6\pi\,\eta\,\frac{d_s}{2}\,v$$

Wir führen folgende Abkürzungen ein.

$$A = \frac{6\pi\,\eta\, d_s/2}{m_s} \quad \text{und} \quad B = \frac{(\rho_s - \rho_{OTP})\,\frac{4}{3}\pi \left(\frac{d_s}{2}\right)^3 g}{m_s}$$

$\Rightarrow\ \dot{v} = B - A\,v$ (bzw. $\ddot{z} = B - A\,\dot{z}$)

$\dot{v} + A\,v = B$ ist inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

1. Schritt:
Lösung der homogenen Differentialgleichung $\dot{v} + A\,v = 0$ mit dem Ansatz $v(t) = v_E \cdot e^{\lambda t}$.
Einsetzen in Differentialgleichung:

$$\lambda\, v_E\, e^{\lambda t} + A\, v_E\, e^{\lambda t} = 0$$
$$\Rightarrow\ \lambda = -A$$
$$\Rightarrow\ v_H(t) = v_E\, e^{-At}$$

2. Schritt: spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $v_s(t)$.

Ansatz: $v_s(t) = v_E(t)\, e^{-At}$

$$\begin{array}{c|c} v_E'(t) & \\ \hline e^{-At} & B \end{array}$$

$$v_s(t) = \frac{B}{A} = konst.$$

$$v(t) = v_H(t) + v_s(t) = v_E\, e^{-At} + \frac{B}{A}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$-A\,v_E\,e^{-A\,t} + A\,v_E\,e^{-A\,t} + B = B\,.$$

Anfangsbedingungen:

$v(t=0) = 0 \;\Rightarrow\; v_E = -\dfrac{B}{A}$

$v(t) = \dfrac{B}{A}\,(1 - e^{-A\,t})$

$z(t) = \dfrac{B}{A}\left(t + \dfrac{1}{A}\,e^{-A\,t} - \dfrac{1}{A}\right) + C$

(oder Berechnung des unbestimmten Integrals: $z(t) = \dfrac{B}{A}\left(t + \dfrac{1}{A}\,e^{-A\,t}\right) + C$) mit Anfangsbedingung: $z(t=0) = 0$ gilt:

$C = 0$ (bzw. $C = -\dfrac{B}{A^2}$ (unbestimmtes Integral))

$\Rightarrow\; z(t) = \dfrac{B}{A^2}\,(A\,t + e^{-A\,t} - 1)$

c) Der stationäre Zustand stellt sich für $t \to \infty$ ein.

$$\text{Also } v(t \to \infty) = \frac{B}{A} = \frac{(\rho_s - \rho_{OTP})\,\frac{4}{3}\,\pi\left(\frac{d_s}{2}\right)^3 g}{6\pi\,\eta\,\frac{d_s}{2}}$$

$$= \frac{(\rho_s - \rho_{OTP})\,\frac{4}{3}\,\pi\left(\frac{d_s}{2}\right)^2}{6\pi\,\eta}\,g$$

$$= \frac{(\rho_s - \rho_{OTP})\,d_s^2\,g}{18\,\eta}$$

oder Berechnung über Kräftegleichgewicht.
Im stationären Zustand muß gelten:

$F_g = F_A + F_R$

$m_s g = m_{OTP} \cdot g + 6\pi\,\eta\,\dfrac{d_s}{2}\,v$

$$\Rightarrow\; v = \frac{(\rho_s - \rho_{OTP})\,\frac{4}{3}\,\pi\left(\frac{d_s}{2}\right)^2 g}{6\pi\,\eta} = \frac{(\rho_s - \rho_{OTP})\,d_s^2\,g}{18\,\eta}$$

Mit den in der Aufgabenstellung angegebenen Werten berechnet sich die Geschwindigkeit der Kugel im stationären Zustand zu $v = 0.19$ m s^{-1}.

1.4 Aufgabe 4

a) Die Druckdifferenz $\Delta P = P_1 - P_0$ treibt die Strömung durch das Rohrstück der Länge L an.
Der Druck 3 m unter der Oberfläche von OTP ergibt sich durch den Umgebungsdruck und die Kraft, die die Flüssigkeitssäule auf die Fläche A ausübt.

$$\frac{\rho_{OTP} \cdot A \cdot H \cdot g}{A} = P_{OTP}(H) = \rho_{OTP} \cdot g \cdot H$$

$$\Rightarrow\; P_{OTP}(H) = 1.33\,\mathrm{kg\ dm^{-3}} \cdot 9.82\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 3\,\mathrm{m}$$

$$= 0.391\,\mathrm{bar} = 0.391 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$$

$$\Rightarrow\; P_1 = P_0 + P_{OTP}(H)$$

$$\Rightarrow\; \Delta P = P_{OTP}(H) = 0.391 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$$

Wir betrachten den stationären Zustand:
$F_R = F_P$ Reibungskräfte und die Druckkraft müssen sich kompensieren.

$$F_P = \pi\, r^2\, \Delta P = \pi\, r^2\, P_{OTP}(H)$$

Für die Reibungskraft gilt: $F_R \propto \eta\, C\, \mathrm{grad}\,\vec{v}$

$$\Delta\vec{v} = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\vec{v}) \;\Rightarrow\; \text{mit } F_R = \eta \int_V \Delta\vec{v}\, dV$$

Mit dem Satz von Gauß folgt $\rightsquigarrow$ $F_R = \eta \int_S \mathrm{grad}\,\vec{v}\, dS$

Dies reduziert sich zu -$\eta\, S\, \frac{\partial v(r)}{\partial r}$ da $v(r)$ auf dem Rand S konstant ist (keine Rotationsströme).

$$-\eta\, 2\, \pi\, r\, L\, \frac{\partial\, v(r)}{\partial r} = r^2\, \pi\, P_{OTP}(H)$$

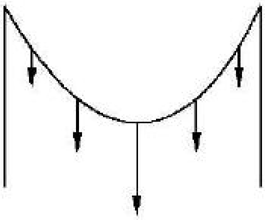
Randbedingung: $v(R) = 0$.

b) $-dv(r) = \frac{r\, P_{OTP}(H)}{2\,\eta\, L}\, dr$

$$\int_{v(r)}^{v(R)} -dv(r) = \int_r^R \frac{r'\, P_{OTP}(H)}{2\,\eta\, L}\, dr'$$

$$-v(R) + v(r) = \frac{P_{OTP}(H)}{4\,\eta\, L}\,(R^2 - r^2)$$

$$v(r) = \frac{P_{OTP}(H)}{4\,\eta\, L}\,(R^2 - r^2) \text{ (Rotationsparaboloid)}$$



$$v(r=0) = \frac{P_{OTP}(H)}{4\,\eta\,L} \cdot R^2$$

c) Der Volumenstrom durch die Teilfläche dA im Abstand r von der Rohrmitte ergibt sich über $dA \cdot v(r)$. Folglich gilt für den gesamten Volumenstrom:

$$\frac{dV}{dt} = \int v(r)\,dA = \int\limits_{r=0}^{R} v(r)\,2\pi\,r\,dr$$

$$= \frac{P_{OTP}(H)}{4\,\eta\,L} \int\limits_{r=0}^{R} (R^2 - r^2)\,2\pi\,r\,dr = \frac{P_{OTP}(H)\,2\pi}{4\,\eta\,L} \left[\frac{1}{2}\,R^4 - \frac{1}{4}\,R^4\right]$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi\,P_{OTP}(H)\,R^4}{8\,\eta\,L} \quad \text{Hagen-Poiseulle'sches Gesetz}$$

Mit den in der Aufgabenstellung angegebenen Größen gilt:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi\,0.391 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot (1.5\,\mathrm{m})^4}{8 \cdot 1.88\,\mathrm{Pas} \cdot 30\,\mathrm{m}} = 1.378 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3\,s^{-1}} = 1.378\,\mathrm{l\,s^{-1}}$$

d) Die mittlere Geschwindigkeit ergibt sich aus dem Volumenstrom geteilt durch die Gesamtfläche des Rohres A.

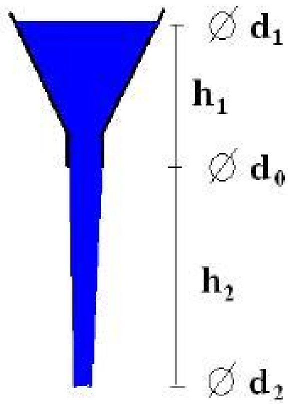
$$\langle v \rangle = \frac{\frac{dV}{dt}}{A} = \frac{\pi\,P_{OTP}(H)\,R^4}{8\,\eta\,L\,\pi\,R^2} = \frac{P_{OTP}(H)\,R^2}{8\,\eta\,L}$$

Mit den angebenen Größen gilt:

$$\langle v \rangle = 1.95\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

1.5 Aufgabe 5

a)



b) *Gesucht: Aussströmungsgeschwindigkeit*
Bernoulli-Gleichung:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2$$

Aus der Kontinuitätgsgleichung $v_1 A_1 = v_0 A_0$ *folgt*

$$v_1 = v_0 \frac{A_0}{A_1} = v_0 \frac{d_0^2}{d_1^2}$$

da die Bedingung (laut Angabe) $v_1 = 0$ *gilt, folgt dann:*

$$\rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_0^2 \qquad \Rightarrow \; v_0 = \sqrt{2gh_1} = 1,5\frac{m}{s}$$

c) *Gesucht: Fülldauer für* $1l$*-Flasche:*
Aus der Kontinuitätsgleichung (V*=Volumen)*

$$\frac{V}{t} = A_0 v_0 = \frac{\pi}{4} d_0^2 v_0$$

dann ist

$$t = \frac{V}{A_0 v_0} = \frac{4V}{\pi d_0^2 \sqrt{2gh_1}} = 23,5s$$

d) *Gesucht: Durchmesser weit unterhalb des Trichters*
Bernoulli-Gleichung:

$$p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_1 + \rho g h_1$$

mit $p_2 = p_1$ *folgt*

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

Die Kontinuitätsgleichung liefert:

$$A_0 v_0 = A_2 v_2 \qquad \Rightarrow \; \frac{\pi}{4} d_0^2 v_0 = \frac{\pi}{4} d_2^2 v_2$$

Daraus folgt:

$$d_2 = d_0 \sqrt{\frac{v_0}{v_2}} = d_0 \sqrt[4]{\frac{h_1}{h_1 - h_2}} = 4,5mm$$

1.6 Aufgabe 6

Nach oben wirkt die Auftriebskraft F_A, und nach unten wirken die Reibungskraft F_R und die Gewichtskraft mg der Gasblase. Wir wählen als positive Richtung die nach oben.
Als Indices verwenden wir F für die verdrängte Flüssigkeit, L für die Limonade, sowie G für das Gas. Bis die Gasblase ihre Endgeschwindigkeit erreicht, wird sie mit der Beschleunigung a_y nach oben beschleunigt, und für die Kräfte gilt

$$F_A - m_G g - F_R = m a_y$$

Nach dem Erreichen der Endgeschwindigkeit ist die Beschleunigung null

$$F_A - m_G g - F_R = 0 \quad (1)$$

Gemäß dem Archimedischen Prinzip gilt für die Auftriebskraft auf die Gasblase:

$$|F_A| = |F_{G,F}| = m_{Fl} g = \rho_{Fl} V_{Fl} g = \rho_L V_{Blase} g$$

Mit der Masse $m_G = \rho_G V_{Blase}$ der Gasblase und der Endgeschwindigkeit v_e erhalten wir aus Gleichung (1):

$$\rho_L V_{Blase} g - \rho_G V_{Blase} g - 6\pi\eta r v_e = 0$$

Wir berücksichtigen, dass $\rho_L \gg \rho_G$ ist, und erhalten für die Endgeschwindigkeit:

$$v_e = \frac{V_{Blase} g(\rho_L - \rho_G)}{6\pi\eta r} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_L - \rho_G)}{6\pi\eta r} = \frac{2r^2 g(\rho_L - \rho_G)}{9\eta} \approx \frac{2r^2 g\rho_L}{9\eta}$$

$$= \frac{2(0,5\cdot 10^{-3}m)(9,81\frac{m}{s^2})}{9(1,8\cdot 10^{-3}Pa\cdot s)} \cdot 1,1\cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} = 0,333\frac{m}{s}$$

Damit ist die Zeitspanne, die die Gasblase zur Oberfläche benötigt:

$$\Delta t \approx \frac{h}{v_e} \approx \frac{0,15m}{0,333\frac{m}{s}} = 0,45s$$

Diese Zeitspanne von rund einer halben Sekunde ist realistisch.

2 Gastheorie

2.1 Aufgabe 7

a) Luft ist im Gegensatz zu einer Flüssigkeit kompressibel. Für ein abgeschlossenes Gasvolumen (konstante Gasmasse) gilt mit $PV = konst.$ und $V = M/\rho$ bei Druckänderung von P_0 auf P

$$\frac{P}{\rho} = konst. = \frac{P_0}{\rho_0}.$$

In einer Luftsäule berechnet sich die Druckänderung dP durch Änderung der Höhe um dh zu

$$dP = -\rho\, g\, dh\,.$$

Dies ist analog zur Flüssigkeit mit dem Unterschied, dass nur für kleine Änderungen der Höhe ein linearer Zusammenhang mit dem Druck gegeben ist. Setzt man $\rho = \frac{P\,\rho_0}{P_0}$ in die Gleichung für die Druckänderung ein, so folgt

$$dP = -\frac{P\,\rho_0}{P_0}\, g\, dh$$

Integration führt zu

$$\ln P = -\frac{\rho_0}{P_0}\, g\, h + C\,,$$

also

$$P = e^{-\frac{\rho_0}{P_0}\, g\, h + C}.$$

Mit der Anfangsbedingung $P(h=0) = P_0$ folgt

$$P(h) = P_0\, e^{-\frac{\rho_0}{P_0}\, g\, h}.$$

Folglich gilt auch

$$\rho(h) = \rho_0\, e^{-\frac{\rho_0}{P_0}\, g\, h}.$$

b) Aus der barometrischen Höhenformel ergibt sich die Dichte der Luft in 600 m Höhe zu

$$\rho(600\,\mathrm{m}) = 1.198\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\,.$$

c) Die Auftriebskraft am Boden entspricht der durch den Ballon verdrängten Luftmasse

$$F_A(h=0) = V_1\,\rho_0\, g = 5.708 \cdot 10^4\,\mathrm{N}\,.$$

In 600 m Höhe gilt für den Luftdruck $P = P_0\, e^{-\frac{\rho_0}{P_0}\, g\, 600\,\mathrm{m}}$. Ferner betrachten wir für den Aufstieg des Ballons nur $PV = konst$, also

$$P_0\, V_1 = P\, V\,.$$

Daraus folgt

$$V = \frac{P_0}{P}\, V_1 = e^{\frac{\rho_0}{P_0}\, g\, 600\,\mathrm{m}}\, V_1\,.$$

Für die Auftriebskraft auf den Ballon in 600 m Höhe gilt demnach

$$F_A(h = 600\,\mathrm{m}) = V\,\rho(600\,\mathrm{m}) = V_1\, e^{\frac{\rho_0}{P_0}\, g\, 600\,\mathrm{m}}\, \rho_0\, e^{-\frac{\rho_0}{P_0}\, g\, 600\,\mathrm{m}} = V_1\,\rho_0\,.$$

Sie entspricht also der Auftriebskraft am Boden.

d) Für die Berechnung der Gesamtmasse, die der Ballon höchstens haben darf, gilt, dass sich hier gerade die Auftriebskraft und die Gewichtskraft kompensieren.

$$F_A = F_g$$

Die Nettomasse, die der Ballon haben darf berechnet sich zu

$$M_N = \rho_0\,(V_1 - V_0) = 1940\,\mathrm{kg}\,.$$

2.2 Aufgabe 8

Lösung Der Ballon fliegt wenn $F_A > F_G$

$F_A = \rho_L(h)\, g\, V = \rho_{0L}\, e^{-\rho_0\, g\, h/P_0}\, g\, V$

F_A Auftriebskraft, ρ_L Dichte der Luft

$P_0 = 10^5\,\text{Pa} \triangleq 1\,\text{bar} = 10^5\,\text{N}\,\text{m}^{-2}$

$h = 950\,\text{m}\,;\ \rho_{0L} = 1,293\,\text{kg/m}^3$

$F_A = 1,293\,\text{kg}\,\text{m}^{-3} \cdot 9,81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}\, e^{[(1,293 \cdot 9,81/10^5) \cdot 950]} \cdot 3500\,\text{m}^3$

$F_A = 39355\,\text{N}$

Die Masse von Ballon mit Last muss $< 4011,8\,\text{kg} \approx \underline{4012\,\text{kg}}$ sein.

Masse des Gases:
i) He

$m_{He} = \rho_{He}(h) \cdot V = \rho_{0\,He}\, e^{-(\rho_{L_0}\, g\, h/P_0)} \cdot V$

$m_{He} = 0,1785\,\text{kg}\,\text{m}^{-3} \cdot 3500\,\text{m}^3 \cdot e^{-\left(\frac{1,293 \cdot 9,81 \cdot 950}{10^5}\right)} = 554\,\text{kg}$

Die Last darf nur noch (4012 - 554) kg = <u>3458 kg</u> wiegen.

ii) H

$m_{H_2} = \rho_{H_2}(h) \cdot V = \rho_{0\,H_2}\, e^{-(\rho_{L_0}\, g\, h/P_0)} \cdot V = 0,09\,\text{kg}\,\text{m}^{-3} \cdot 3500\,\text{m}^3 \cdot e^{-\left(\frac{0,09 \cdot 9,81 \cdot 950}{10^5}\right)} = 279\,\text{kg}$

Jetzt dürfte die Last (4012 - 279) kg = <u>3733 kg</u> wiegen.

Nachteil: Explosionsgefahr (Knallgasreaktion)
Alternative: Heißluftballon.

2.3 Aufgabe 9

a) Wahrscheinlichste Geschwindigkeit: Maximum der Verteilung

$$\frac{df(v)}{dv} = 0$$

$$\frac{d}{dv}\left(\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{k_b\,T}\right)^{3/2}}_{C} v^2\, e^{\frac{-m\,v^2}{2\,k_b\,T}}\right) = C\cdot\left(2\,v\cdot e^{\frac{-m\,v^2}{2\,k_b\,T}}\right) + v^2\left(\frac{-m\,2\,v}{2\,k_b\,T}\right)\, e^{\frac{-m\,v^2}{2\,k_b\,T}}$$

$$= C\,e^{\frac{-m\,v^2}{2\,k_b\,T}}\left(2\,v - 2\,v^3\,\frac{m}{2\,k_b\,T}\right) = 0 \qquad \Big|: 2\,v\,C\,e^{\frac{-m\,v^2}{2\,k_b\,T}}$$

$$1 - v^2\,\frac{m}{2\,k_b\,T} = 0$$

$$v_w = \underline{\sqrt{\frac{2\,k_b\,T}{m}}}$$

b) mittleres Geschwindigkeitsquadrat:

$$\langle v^2\rangle = \int_0^\infty v^2\, f(v)\, dv$$

$$\langle v^2\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{k_b\,T}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^4\, e^{-m\,v^2/2\,k_b\,T}\, dv$$

Mit $\displaystyle\int_0^\infty x^4\, e^{-a\,x^2}\, dx = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}} = \frac{3}{8}\,\frac{\pi^{1/2}}{a^{5/2}}$

Hier: $a = \dfrac{m}{2\,k_b\,T}$

$$\langle v^2\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{k_b\,T}\right)^{3/2}\cdot\frac{3}{8}\,\frac{\pi^{1/2}}{m^{5/2}}\cdot(2\,k_b\,T)^{5/2} = \underline{\frac{3\,k_b\,T}{m}}$$

$$\sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\frac{3\,k_b\,T}{m}} \neq v_w$$

c) $\langle E_{kin}\rangle = \left\langle\dfrac{1}{2}\,m\,v^2\right\rangle = \dfrac{1}{2}\,m\,\langle v^2\rangle = \dfrac{1}{2}\,m\,\dfrac{3\,k_b\,T}{m}$

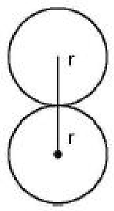
$$\langle E_{kin}\rangle = \underline{\frac{3}{2}\,k_b\,T}$$

Drei Translationen v_x, v_y, $v_z \mathrel{\hat{=}} 3$ Freiheitsgraden. Generell $\dfrac{1}{2}\,k_b\,T$ pro Freiheitsgrad.

2.4 Aufgabe 10

a) Das Volumen der Gas-Teilchen ist klein gegen V des Behälters. $\Rightarrow$ Massepunkte
WW: nur elastische Stöße.

b) abstoßende Ww.



Die Moleküle können sich nur bis auf $d = 2r$ nähern (Abstand der Kugelmittelpunkte)

Ist im Behälter ein Teilchen vorhanden, so schließt es für die anderen einen Volumenanteil von
$\frac{4}{3}\pi\,(2\,r)^3 = 8\,V_K$ aus. (V_K Volumen des Teilchens).

Bei 3 vorhandenen Teilchen (unter Vernachlässigung der Wandeffekte) ist das "verbotene" Volumen: $2 \cdot 8\,V_K$.

Das freie Volumen ist dann (Behälter $V = L^3$)

$V_2 = L^3 - 8\,V_K$; $V_3 = L^3 - 2 \cdot 8\,V_K \ldots V_n = L^3 - (n-1)\,8\,V_K$
V_i ist das freie Volumen fürs i-te Teilchen

$V_N \approx L^3 - N\,8\,V_K = V - \nu b$

c) Durch die Wand ist die Kraft, die zwischen den Teilchen wirkt nicht mehr kugelsymmetrisch, nahe der Wand wirkt eine Kraft $F \propto \rho$ auf ein Atom.

Die Anzahl der Atome nahe der Wand $N_W \propto \rho$. Daher ist die nach innen wirkende Kraft $\propto \rho^2$. Sie führt zu einen Binnendruck zusätzlich zum Außendruck.

$P_B = \frac{a\,\nu^2}{V^2}$; $p \propto F \propto \rho^2 \propto \frac{\nu^2}{V^2}$

a hängt von der WW der Teilchen ab.

d) ideales Gas: $PV = \nu\,RT$

$(P + P_B)\,(V - b\,\nu) = \nu\,RT$

$\left(P + \frac{a\,\nu^2}{V^2}\right)\,(V - b\,\nu) = \nu\,RT$