

Andreas Brenneis; Rebecca Saive; Felicitas Thorne

Hydrodynamik und Gastheorie

Mittwoch, 30. Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Hydrodynamik	1
1.1	Kompressibilität und Kompressionsmodul	1
1.2	Strömungs- und Flüssigkeitstypen	1
1.3	Euler-Gleichung für ideale Flüssigkeiten	2
1.4	Kontinuitätsgleichung für inkompressibele Flüssigkeiten	2
1.5	Bernoulli-Gleichung	3
1.6	Laminare Strömung eines Fluids	3
1.6.1	Innere Reibung	3
1.6.2	Das Hagen-Poiseulle-Gesetz oder die laminare Strömung durch Rohre	4
1.6.3	Das Stockes'sche Reibungsgesetz oder das Kugelfall-Viskosimeter	4
1.6.4	Navier-Stokes-Gleichung für reale Fluide	5
1.7	Turbulente Strömung eines Fluids	5
2	Gastheorie	5
2.1	Das ideale Gas	5
2.1.1	Eigenschaften des idealen Gases	5
2.1.2	Die Ideale Gasgleichung	6
2.1.3	Die Barometrische Höhenformel	6
2.2	Kinetische Gastheorie	7
2.3	Reale Gase	7

1 Hydrodynamik

Die Hydrodynamik beschreibt die Physik strömender Fluide. Zunächst werden die Grundbegriffe erklärt, die zum Verständnis von Strömungen wichtig sind.

1.1 Kompressibilität und Kompressionsmodul

Die Kompressibilität einer Flüssigkeit oder eines Gases ist ein Maß für die Druckabhängigkeit der Dichte der Substanz. Sie ist wie folgt definiert:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \quad (1)$$

und gibt die relative Volumenänderung in Abhängigkeit der Änderung des Druckes an.

Analog zum Elastizitätsmodul eines Festkörpers lässt sich für Flüssigkeiten und Gase ein sogenanntes Kompressionsmodul definieren als der Kehrwert der Kompressibilität:

$$K = \frac{1}{\kappa} = -V \frac{\partial p}{\partial V} \quad (2)$$

Das Kompressionsmodul wird in der gleichen Einheit wie der Druck angegeben. Die Definitionen für Kompressibilität und Kompressionsmodul in der obigen Form gelten sowohl für Flüssigkeiten, wie auch für Gase.

Für Flüssigkeiten ist die Kompressibilität extrem klein (Größenordnung $10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{N}}$) was bedeutet, dass sich das Volumen einer Flüssigkeit kaum mit dem Druck ändert und die Dichte der strömenden Flüssigkeiten somit für unterschiedliche Drücke als konstant betrachtet werden kann. Wie später formal gezeigt wird, gilt dies im Allgemeinen für Gase nicht: Eine Erhöhung des Druckes hat z.B. immer eine Verringerung des Volumens zur Folge. Das heißt, Gase sind im Allgemeinen kompressibel woraus folgt, dass die Dichte bei strömenden Gasen in der Regel nicht überall konstant ist.

Soll die Strömung von Flüssigkeiten und Gasen trotzdem durch dieselben Gleichungen beschrieben werden, muss die Strömungsgeschwindigkeit der Substanzen klein sein. Für kleine Geschwindigkeiten verhalten sich Gase wie inkompressible Flüssigkeiten.

1.2 Strömungs- und Flüssigkeitstypen

Flüssigkeiten werden prinzipiell in zwei Arten unterschieden:

- **Ideale Flüssigkeit** In idealen Flüssigkeiten sind die Reibungskräfte im Vergleich zu allen anderen auftretenden Kräften vernachlässigbar klein.
- **Zähe Flüssigkeit** In zähen oder stark viskosen Flüssigkeiten sind die Reibungskräfte groß im Vergleich zu allen anderen auftretenden Kräften.

Je nach Art der Flüssigkeit können unterschiedliche Strömungstypen vorherrschen. Doch zunächst einmal wird definiert, was physikalisch unter „Strömung“ verstanden werden kann:

Strömung ist die Bewegung eines Volumenelementes V einer Substanz (Flüssigkeit oder Gas) mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}; t)$. Man unterscheidet verschiedene Arten von Strömungen:

- **Stationäre Strömung** Die Strömungsgeschwindigkeit ist zeitlich konstant und nur vom Ort, aber nicht von der Zeit abhängig: $\vec{v}(\vec{r})$
- **Laminare Strömung** Sie tritt in der Regel in zähen Flüssigkeiten auf, d.h. bei großen Reibungskräften innerhalb der Flüssigkeit.
- **Turbulente Strömung** Dieser Strömungstyp tritt häufig in idealen Flüssigkeiten auf, d.h. bei Abwesenheit von Reibungskräften.

Der Grund für das Auftreten von Strömungen ist meistens ein Druckgradient in der Flüssigkeit. So kann mechanisch direkt an zwei verschiedenen Stellen der Flüssigkeit ein unterschiedlicher Druck erzeugt werden, oder es herrscht ein Schweredruck aufgrund der Gewichtskraft der Flüssigkeitsmoleküle. Dies führt jeweils zu einer resultierenden Kraft, welche für eine Bewegung der Flüssigkeit sorgt. Auch Reibungskräfte oder elektromagnetische Kräfte können eine Bewegung der Flüssigkeit zur Folge haben.

1.3 Euler-Gleichung für ideale Flüssigkeiten

In diesem Abschnitt wird eine ideale (d.h. reibungsfreie) Flüssigkeit betrachtet. Auf ein Massenelement dm der Flüssigkeit wirke eine Kraft in Folge eines Druckgradienten sowie die Gewichtskraft der Masse. Mit dem Newton'schen Kraftgesetz ergibt sich damit für die Bewegung in eine Raumrichtung:

$$\begin{aligned} dm \frac{dv}{dt} &= \rho \cdot g \cdot dV - dV \frac{\partial p}{\partial x} \\ \Rightarrow \frac{dv}{dt} &= g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned}$$

Weitet man die Betrachtung in drei Raumdimensionen aus, so erhält man die Euler-Gleichung:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) \quad (3)$$

Gleichung 3 bildet die Grundlage der Hydrodynamik idealer Flüssigkeiten.

1.4 Kontinuitätsgleichung für inkompressibele Flüssigkeiten

Jetzt wird eine Flüssigkeit betrachtet, die durch ein Rohr fließt, welches einen örtlich veränderlichen Querschnitt besitzt, wie in Abbildung 1 gezeigt. Da die Masse M der Flüssigkeit erhalten bleibt, muss durch

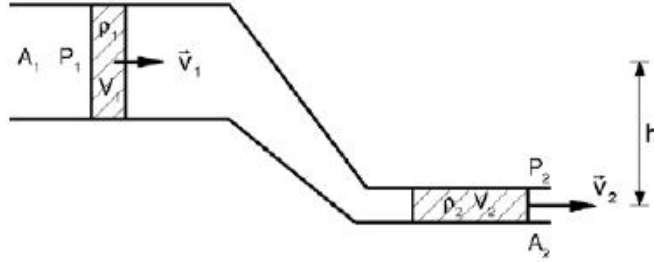


Abbildung 1: Strömung durch ein Rohr mit veränderlichem Querschnitt

jede beliebige Querschnittsfläche A der Röhre im gleichen Zeitintervall gleichviel an Flüssigkeit hindurch strömen. Die Massenstromstärke oder auch Massenfluss genannt, gibt den gesamten Massentransport pro Zeiteinheit durch die Querschnittsfläche des Rohres an und ist wie folgt definiert:

$$I = \frac{dM}{dt}$$

Die Kontinuitätsgleichung lässt sich nun auf einfache Weise schreiben:

$$I = \rho \cdot A \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = I = \rho \cdot A \cdot \vec{v} = \text{const.} \quad (4)$$

Die Kontinuitätsgleichung lässt sich auch noch in anderer Form herleiten. Dazu betrachtet man ein Flüssigkeitsvolumen V , welches zu einem bestimmten Zeitpunkt die Masse

$$M = \int_V \rho dV$$

besitzt. Diese strömt durch die Oberfläche des Volumens hinaus, was einen Massenverlust innerhalb des Volumens zur Folge hat. Die zeitliche Entwicklung der Masse lautet somit:

$$-\frac{\partial M}{\partial t} = \int_S \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

wobei $d\vec{S}$ die Flächennormale zur betrachteten Oberfläche beschreibt. Nach Anwendung des Gauß'schen Satzes für Oberflächenintegrale und der Vertauschung von Integration und Differenziation folgt

$$-\frac{\partial M}{\partial t} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V \text{div}(\rho \vec{v}) dV$$

Diese Gleichung muss für alle Volumina gelten, woraus sich eine andere Form der Kontinuitätsgleichung ergibt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (5)$$

Werden nur inkompressible Flüssigkeiten betrachtet, bleibt die Dichte zeitlich und räumlich annähernd konstant und Gleichung 5 vereinfacht sich zu

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad (6)$$

Das Produkt $\vec{j} = \rho \vec{v}$, welches in der Herleitung mehrmals auftaucht wird auch als Massenstromdichte oder Massenflussdichte bezeichnet.

1.5 Bernoulli-Gleichung

Es wird erneut Abbildung 1 betrachtet. In der Röhre herrschen an den unterschiedlichen Querschnittsflächen aufgrund der Kontinuitätsgleichung unterschiedliche Strömungsgeschwindigkeiten. Das bedeutet, dass sich die kinetische Energie eines Volumenelementes während des Strömungsvorgangs ändert:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \Delta v^2 = \frac{1}{2} \rho V \Delta v^2$$

Wegen des Druckunterschiedes im Rohr wird außerdem die Arbeit $W = V \cdot \Delta p$ an der Flüssigkeit verrichtet und durch den Höhenunterschied im Rohr ergibt sich noch eine Änderung der potenziellen Energie von $E = \rho g V \Delta h$.

Da in diesem Fall wieder ideale, inkompressible Fluide behandelt werden, kann die Energieerhaltung angewendet werden, was auf die Bernoulli-Gleichung 7 führt:

$$p + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = \text{const.} \quad (7)$$

Im Spezialfall von schnell fließenden Fluiden ist $\frac{1}{2} \rho v^2 \gg \rho g h$ und Gleichung 7 lässt sich vereinfachen:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.} \quad (8)$$

An Gleichung 8 kann man erkennen, dass eine hohe Strömungsgeschwindigkeit einen niedrigen Druck zur Folge hat.

1.6 Laminare Strömung eines Fluids

1.6.1 Innere Reibung

Bisher wurden nur ideale Fluide betrachtet, doch spielen zähe Flüssigkeiten eine nicht minder wichtige Rolle in der Physik. Im Folgenden wird der Einfluss der Reibungskraft auf die Strömung von Flüssigkeiten betrachtet. Dazu muss jedoch erst wieder ein Modell erstellt werden, um sich die Situation in zähen Flüssigkeiten vorstellen zu können. Dadurch verringert sich aber der Impuls der obersten Schicht, so

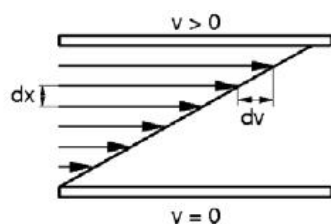


Abbildung 2: Modell zur Inneren Reibung in Flüssigkeiten

Man kann sich vorstellen, dass die gesamte Flüssigkeit in verschiedene Ebenen, sogenannte Lamine, unterteilt ist, wie dies in Abbildung 2 dargestellt ist. Die Lamine entsprechen den Stromlinien in einer strömenden Flüssigkeit, d.h. der Trajektorie, die ein Flüssigkeitselement im Laufe der Zeit durchfährt. Wenn sich die oberste Flüssigkeitsschicht aufgrund einer externen konstanten Krafteinwirkung bewegt, so überträgt wegen der inneren Reibung der Flüssigkeit einen Teil ihres Impulses auf die Nachbarschicht.

dass effektiv von der obersten Schicht eine Kraft ausgeht, welche der ursprünglichen Bewegungsrichtung entgegenwirkt. Dies ist die innere Reibungskraft der Flüssigkeit. Aus Experimenten kann man feststellen, dass ihr Betrag in einer Dimension folgender Formel genügt:

$$F_R = -\eta \cdot A \cdot \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \quad (9)$$

Der Vorfaktor η wird dynamische Zähigkeit oder Viskosität genannt und hat die Einheit Pa·s. Die Fläche A entspricht der Oberfläche einer Flüssigkeitsschicht. Der letzte Faktor entspricht dem Geschwindigkeitsgefälle innerhalb der Flüssigkeit, welches durch die Impulsübertragung von Schicht zu Schicht bedingt ist.

Die innere Reibungskraft einer Flüssigkeit lässt sich auch noch anders beschreiben:

$$\vec{F}_R = \eta \int_V \Delta \vec{v} dV \quad (10)$$

Das beide Gleichungen dieselbe Reibungskraft beschreiben, wird hier nicht bewiesen. Man kann es sich jedoch durch einfache Überlegungen plausibel machen.

Im Folgenden werden zwei Anwendungen der inneren Reibung in zähen Flüssigkeiten betrachtet.

1.6.2 Das Hagen-Poiseuille-Gesetz oder die laminare Strömung durch Rohre

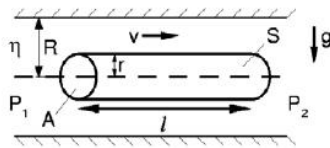


Abbildung 3: Laminare Strömung durch ein Rohr

Wie in Abbildung 3 gezeigt, wird nun ein Rohr der Länge l mit Radius R betrachtet, in welchem durch eine Druckdifferenz eine laminare, stationäre Strömung aufrecht erhalten wird.

Die einzelnen Lamine kann man sich hier als Zylinder mit Radius r vorstellen. Somit zeigt der Geschwindigkeitsgradient in Richtung vom Radius.

Es wirken in diesem System also zwei Kräfte. Zum einen die Druckkraft

$$F_p = (p_1 - p_2) A = \pi \cdot r^2 \cdot \Delta p$$

und zum anderen die Reibungskraft

$$F_R = -\eta S \frac{dv}{dr} = -2\eta \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot \frac{dv}{dr}$$

Im Fall einer stationären Strömung ist die Strömungsgeschwindigkeit v unabhängig von der Zeit und somit gilt $\frac{dv}{dt} = 0$, d.h. die Flüssigkeit im Rohr wird nicht beschleunigt. Somit müssen sich die beiden Kräfte exakt aufheben. Durch Gleichsetzen der Kräfte ergibt sich:

$$r \Delta p = -2\eta l \frac{dv}{dr}$$

Durch Integration über r mit der Anfangsbedingung $v(R) = 0$ erhält man die Strömungsgeschwindigkeit:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad (11)$$

Den Volumenstrom, d.h. die pro Zeiteinheit durch das Rohr strömende Flüssigkeitsmenge erhält man durch Integration wie folgt:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R v(r) \cdot r \cdot dr$$

woraus sich das Hagen-Poiseuille'sche Gesetz ergibt:

$$I = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l} R^4 \quad (12)$$

1.6.3 Das Stokes'sche Reibungsgesetz oder das Kugelfall-Viskosimeter

Lässt man eine Kugel in eine zähe Flüssigkeit fallen, so dass im Fallen laminar umströmt wird, so lässt sich aus einem solchen Experiment (Kugelfallviskosimeter) bei genauer Kenntnis der experimentellen Apparaturen die Reibungskraft der Flüssigkeit bestimmen. Sie ist durch das Stokes'sche Reibungsgesetz gegeben:

$$F_R = 6\pi \cdot \eta \cdot R_K \cdot v \quad (13)$$

Dabei bezeichnet R_K den Kugelradius.

Will man die Bewegung der Kugel in der Flüssigkeit untersuchen, so ist zu beachten, dass die Gewichtskraft der Kugel, welche der Reibungskraft entgegengerichtet ist, durch die Auftriebskraft verringert ist:

$$F_G - F_A = (\rho_K - \rho_{fl}) \frac{4}{3} \pi R_K^3 g = 6\pi\eta R_K v = F_R$$

Daraus folgt, dass die Kugel im Gleichgewicht eine konstante Geschwindigkeit besitzt:

$$v = \frac{2R_K^2 g}{9\eta} (\rho_K - \rho_{fl})$$

Das Stokes'sche Reibungsgesetz lässt sich auch theoretisch herleiten. Dabei zeigt sich, dass Gleichung 13 nur für kleine Kugelradien R_K gilt.

1.6.4 Navier-Stokes-Gleichung für reale Fluide

Mit der Kenntnis über die innere Reibungskraft in einem Fluid lässt sich Euler-Gleichung für ideale Fluide erweitern. Nach Gleichung 10 ist die Reibungskraft auf ein Massenelement gegeben durch:

$$dm \frac{d\vec{v}}{dt} = \eta \Delta \vec{v} dV$$

Somit erhält man die Navier-Stokes-Gleichung durch Addition dieses Terms zu Gleichung 3:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} \quad (14)$$

1.7 Turbulente Strömung eines Fluids

Wird die Strömungsgeschwindigkeit eines Fluids zu groß, oder ist die Viskosität zu klein, so kommt es zur Bildung von Wirbeln innerhalb der Flüssigkeit. Das bedeutet, die laminare Strömung geht in eine turbulente Strömung über.

Ein Maß für den Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung ist die Reynoldszahl:

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot r}{\eta}$$

Sie ist eine dimensionslose Konstante. Der Faktor r ist dabei eine Längendimension, welche je nach Situation anders definiert ist (z.B. der Radius eines Rohres).

Die Strömung von Wasser in einem Rohr ist für $Re < 2300$ laminar, für $Re > 2300$ beobachtet man Turbulenzen.

2 Gastheorie

Erhitzt man eine Flüssigkeit über ihren Siedepunkt hinaus, so wird die kinetische Energie der Flüssigkeitsmoleküle größer als ihre Bindungsenergie untereinander und die Flüssigkeit geht durch Verdampfen in die gasförmige Phase über. In einem Gas sind die einzelnen Moleküle frei beweglich und nicht mehr durch Bindungen beschränkt. Die Gasmoleküle wechselwirken ausschließlich durch Stöße miteinander.

2.1 Das ideale Gas

Wie bisher wird zu Beginn das ideale Gas betrachtet, und erst später wird das Modell des idealen Gases an die Wirklichkeit angepasst.

2.1.1 Eigenschaften des idealen Gases

Um von einem idealen Gas sprechen zu können, müssen folgende Eigenschaften in guter Näherung erfüllt sein:

- Die Gasmoleküle können als Massepunkte betrachtet werden, d.h. sie haben kein Trägheitsmoment.
- Es herrscht keine anziehende Wechselwirkung zwischen den einzelnen Gasmolekülen, d.h. es findet keine Kondensation statt.

- Es finden nur elastische Stöße der Moleküle untereinander und mit den Wänden des Behälters statt.

Da die Dichte ρ in Gasen sehr viel kleiner ist als in Flüssigkeiten oder Festkörpern, nehmen Gase das komplette ihnen zur Verfügung stehende Volumen ein. Neben der Dichte gibt es noch andere Variablen, sogenannte Zustandsgrößen, welche den Zustand des Gases charakterisieren. Dies sind im Wesentlichen Temperatur T in K, Teilchenzahl N , Druck p und Volumen V .

2.1.2 Die Ideale Gasgleichung

Experimentell kann man zwischen den Zustandsgrößen verschiedenen Zusammenhänge finden:

1. Für $N = \text{const.}$, $T = \text{const.}$ ergibt sich das Gesetz von Boyle und Marriotte:

$$p \cdot V = \text{const.}$$

2. Hält man statt der Temperatur das Volumen des Gases konstant, so erhält man das Gesetz von Gay-Lussac:

$$\frac{p}{T} = \text{const.}$$

3. Zuletzt findet man bei $V = \text{const.}$ und $T = \text{const.}$:

$$p \propto N$$

Aus 1 und 2 folgt für ein Gas mit konstanter Teilchenzahl N

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{const.}$$

und mit 3 bei variabler Teilchenzahl

$$\frac{p \cdot V}{T} = N \cdot k_b$$

Der Proportionalitätsfaktor $k_b = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ ist die Boltzmannkonstante. Zum Schluss erhält man daraus die Zustandsgleichung für ideale Gase:

$$p \cdot V = N \cdot k_b \cdot T = \nu \cdot R \cdot T \quad (15)$$

Man kann die Zustandsgleichung abhängig von der Teilchenzahl N oder der Stoffmenge ν schreiben. Die Stoffmenge ist definiert durch $\nu = \frac{N}{N_A}$, mit der Avogadrozahl $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$. $R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ bezeichnet in Gleichung 15 die Gaskonstante.

Mit der idealen Gasgleichung lässt sich das sogenannte Normalvolumen eines Gases zu $V_0 = 22,41$ berechnen. Dies entspricht dem Volumen, das ein Mol ideales Gas bei Normaldruck $p_0 = 10^5 \text{Pa}$ und einer Temperatur von $T_0 = 273,15 \text{K}$ einnimmt.

2.1.3 Die Barometrische Höhenformel

Als Anwendungsbeispiel wird nun die Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe in der Erdatmosphäre berechnet. Dazu ist folgende Vorüberlegung notwendig: Aus dem Gesetz von Boyle und Marriotte und der Definition der Dichte ergibt sich, dass der Druck eines Gases proportional zur Dichte ist $p \propto \rho$, d.h. $\frac{p}{\rho} = \text{const.}$

Auf eine infinitesimale Luftschicht wirkt nur die Schwerkraft dF_G . Das bedeutet der Druck, der auf die Luftschicht wirkt ist $dp = -\rho(z) \cdot g \cdot dz$. Über die Vorüberlegung finden wir folgende Form für die Dichte des Gases in der Höhe z : $\rho(z) = \frac{\rho(0)}{p(0)} p(z)$.

Einsetzen dieser Beziehung und Integration mit der Anfangswertbedingung $p(0) = p_0$ liefern schließlich die Barometrische Höhenformel:

$$p(z) = p_0 \exp \left[-g \frac{\rho(0)}{p_0} z \right] \quad (16)$$

Die Barometrische Höhenformel gilt bis zu einer Höhe von etwa 10km. Ab dieser Höhe führt der Einfluss der Temperatur zu Abweichungen.

2.2 Kinetische Gastheorie

In diesem Abschnitt werden kurz die wichtigsten Grundlagen aus der kinetischen Gastheorie angesprochen.

Die kinetische Energie von Gasmolekülen, die sich in einem endlichen Volumen V befinden, ergibt sich mit Hilfe der idealen Gasgleichung zu

$$E_{kin} = \frac{3}{2} \cdot k_b \cdot T \quad (17)$$

Dabei gilt der **Gleichverteilungssatz**:

Bei einem idealen Gas, das genügend lange bei einer konstanten Temperatur T gehalten wird, verteilt sich die Energie der einzelnen Atome oder Moleküle durch Stöße gleichmäßig auf alle Freiheitsgrade, sodass im Mittel jedes Teilchen die Energie $\bar{E}_{kin} = f \cdot \frac{1}{2} k_b T$ hat, wenn f die Zahl der ihm zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade ist.

Im idealen Gas hat jedes Molekül 3 Translationsfreiheitsgrade, wodurch sich Gleichung 17 ergibt. Bei realen Gasen müssen unter Umständen noch Rotationsfreiheitsgrade mit berücksichtigt werden.

Die innere Energie U des Gases ist definiert als die Summe der kinetischen Energien aller Teilchen.

In einem Gas bewegen sich die Gasmoleküle alle mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Gleichung 17 gilt nur für den Mittelwert des Quadrates aller Geschwindigkeiten. Dieser berechnet sich wie folgt:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 \cdot f(v) \cdot dv \quad (18)$$

Dabei beschreibt die Funktion $f(v)$ die Verteilung der Geschwindigkeit im Gas. Experimentell findet man, dass sie einer Maxwell-Verteilung gehorcht:

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{k_b T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp \left[-\frac{mv^2}{2k_b T} \right] \quad (19)$$

2.3 Reale Gase

Reale Gase unterscheiden sich von idealen Gasen durch zwei Eigenschaften:

- Die Gasmoleküle besitzen selbst ein endliches Volumen.
- Zwischen den Molekülen kann eine anziehende Wechselwirkung auftreten, d.h. es kann zur Kondensation kommen.

Man kann zeigen, dass die Zustandsänderung eines realen Gases wird in guter Näherung durch die van der Waals-Gleichung beschrieben:

$$\left(p + \frac{a \cdot \nu^2}{V^2} \right) (V - b \cdot \nu) = \nu \cdot R \cdot T \quad (20)$$

Dabei sind a (Einheit $\frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^6}{\text{kmol}^2}$) und b (Einheit $\frac{\text{m}^3}{\text{kmol}}$) spezifische Konstanten des betrachteten Gases. Mit der Definition eines molaren Volumens $V_{mol} = \frac{V}{\nu}$ wird Gleichung 20 zu:

$$\left(p + \frac{a}{V_{mol}^2} \right) (V_{mol} - b) = R \cdot T \quad (21)$$

In Gleichung 21 kann man direkt den Einfluss der Eigenschaften des realen Gases erkennen:

Da sich die Moleküle gegenseitig anziehen (anziehende Wechselwirkung), wird unter sonst konstanten Bedingungen ein kleinerer Druck gemessen. Deshalb muss in der Zustandsgleichung für reale Gase der sogenannte Binnendruck $\frac{a}{V_{mol}^2}$ zum gemessenen Druck addiert werden.

Außerdem darf bei kleinem molarem Volumen des Gases das Eigenvolumen der Gasmoleküle nicht mehr vernachlässigt werden. Deshalb muss das molare Volumen um das sogenannte Kovolumen b reduziert werden, welches den Einfluss des Eigenvolumens berücksichtigt.

Literatur

Demtröder, Experimentalphysik 1 Mechanik und Wärme, 4. Auflage, Springer Verlag
Professor Dr. Andreas Meyer, Skript zur Vorlesung Experimentalphysik I, Version vom
14. Oktober 2005