Andreas Brenneis
Rebecca Saive
Felicitas Thorne

Musterlösung zu den Übungsaufgaben für Dienstag, den 29. Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Zum Aufwärmen

1.1 Aufgabe 1

Gleichgewichtsbedingung: $\sigma_{1,3} = \sigma_{2,3} \cos\varphi_2 + \sigma_{1,2} \cos\varphi_1$.
Der Flüssigketistropfen wird auseinandergezogen, wenn: $\sigma_{1,3} > \sigma_{2,3} + \sigma_{1,2}$.

1.2 Aufgabe 2

Dem Verhalten der Flüssigkeit wird durch die Cosinisfunktion in der Gleichung für die Steighöhe Rechnung getragen (vgl Gleichung 10 der Dienstagsvorlesung).

1.3 Aufgabe 3

Die Kraft des Wassers in horizontaler Richtung gegen die Staumauer ist von Höhe z abhängig:

$$dF_w = p(z)dA$$

Dabei ist

$$p(z) = \rho_w g(h-z)$$

der Schweredruck in der Tiefe $(h-z)$ *unter dem Wasserspiegel. Mit* $dA = ldz$ *folgt weiter:*

$$dF_w = \rho_w g(h-z)ldz$$

Die auf die gesamte Mauer wirkende Kraft des Wassers in horizontaler Richtung erhält man durch Integration:

$$F_w = \int_0^h \rho_w gl(h-z)dz = \rho_w gl \left[h_z - \frac{z^2}{2}\right]_0^h = \frac{\rho_w}{2} glh^2 = 5,3MN$$

2 Zum Trainieren

2.1 Aufgabe 4

Hooksches Gesetz:

$$\sigma = E\varepsilon \Leftrightarrow \frac{F}{A} = E\frac{\Delta l}{l} \Rightarrow F = \underbrace{\frac{EA}{l}}_{k}\underbrace{\Delta l}_{x}$$

Energieerhaltung:

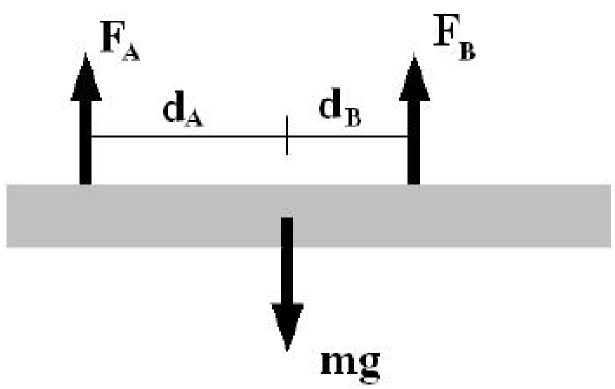
$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = E_{Feder} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{EA}{l}}_{k}\left(\underbrace{\Delta l}_{x}\right)^2 = \frac{1}{2}E\underbrace{Al}_{V}\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 = \frac{1}{2}EV\varepsilon^2$$

dann ist das Volumen gegeben durch

$$V = \frac{mv^2}{E}\left(\frac{l}{\Delta l}\right)^2 = 4\cdot 10^{-3}m^3$$

2.2 Aufgabe 5

a)



b) *Aus dem Kräftegleichgewicht von mg, F_A und F_B erhält man*

$$F_A + F_B - mg = 0 \qquad (1)$$

Sei A die Querschnittsfläche. Das Elastizitätsgesetz $\sigma = E\varepsilon$ liefert

$$\Delta L_{A,B} = \frac{F_{A,B}L_{A,B}}{AE} \qquad (2)$$

Da nun die Drähte gleich lang sind, gilt

$$\Delta L_A = \Delta L_B + l \qquad (3)$$

(2) *in* (3) *eingesetzt liefert*

$$\frac{F_A L_A}{AE} = \frac{F_B L_B}{AE} + l \qquad (4)$$

Nach Lösen des Gleichungssystems mit den Gleichungen (4) und (1) nach F_A und F_B erhalten wir:

$$F_A = \frac{mgL_B + AEl}{L_A + L_B} = 866N$$
$$F_B = mg - F_A = 143N$$

c) *Im Gleichgewicht muss das gesamte Drehmoment verschwinden. Betrachtet man die Drehmomente um den Schwerpunkt, so übt die Gewichtskraft kein Drehmoment bzgl. diesem Punkt aus. Das Momentengleichgewicht liefert:,*

$$F_A d_A - F_B d_B = 0 \Rightarrow \frac{d_A}{d_B} = \frac{F_B}{F_A} = 0,165$$

2.3 Aufgabe 6

a) siehe Demtröder, S. 171, Abbildung 6.12
b) Es werden folgende Näherungen gemacht: $\sin\alpha \approx \alpha = \frac{x}{L}$ und $\sin\varphi \approx \varphi = \frac{x}{r}$. Damit folgt:

$$\alpha \approx \frac{r\varphi}{L}$$

Damit ist die Scherspannung

$$\tau = G\frac{r\varphi}{L}$$

sowie die Kraft auf eine Zylinderhülse

$$dF = \tau \cdot 2\pi r \cdot dr$$

und das Drehmoment auf eine Zylinderhülse:

$$dM = r \cdot dF$$

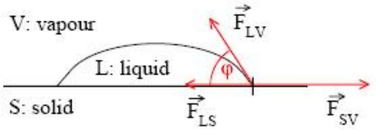
Mit Integration ergibt sich das Drehmoment des Drahtes zu

$$M = \frac{2\pi G\varphi}{L}\int_0^R r^3 \cdot dr = \frac{\pi}{2}G\frac{R^4}{L} \cdot \varphi$$

Das Rücktreibende Drehmoment ist identisch mit dem Drehmoment aus der letzten Gleichung, nur dass es in die entgegengesetzte Richtung zeigt und somit noch mit einem Minuszeichen ergänzt werden muss.

2.4 Aufgabe 7

a)



Wir betrachten den Flüssigkeitstropfen im statischen Gleichgewicht. Die Summe der Kräfte die am Flüssigkeitstropfen am Punkt, an dem die drei Grenzflächen flüssig-fest (LS), flüssig-gasförmig (LV) und fest-gasförmig (SV) zusammentreffen, angreifen muss gleich 0 sein. Die senkrecht zur Substratoberfläche gerichtete Komponente der Kraft $\vec{F}_{LV}$ wird durch das Substrat kompensiert und resultiert in einer minimalen Verformung der Oberfläche. Entlang der Substratoberfläche muss folglich gelten

$$|\vec{F}_{LS}| + |\vec{F}_{LV}| \cos\varphi - |\vec{F}_{SV}| = 0 \,.$$

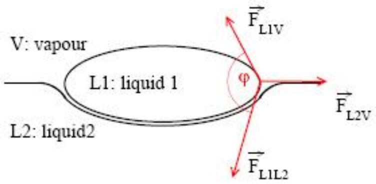
φ bezeichnet den Kontaktwinkel. Die Kräfte sind proportional zur jeweiligen Grenzflächenspannung γ_i. Somit gilt

$$\gamma_{LS} + \gamma_{LV} \cos\varphi - \gamma_{SV} = 0 \,.$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\gamma_{SV} - \gamma_{LS}}{\gamma_{LV}}$$

$$\varphi = \arccos \frac{\gamma_{SV} - \gamma_{LS}}{\gamma_{LV}} \,.$$

b)



Wird der Flüssigkeitstropfen auf eine Flüssigkeitsoberfläche gesetzt, so ist keine Projektion der Kräfte auf die Oberfläche möglich. Die an der Grenzfläche zwischen Flüssigkeit 1, Flüssigkeit 2 und der Luft angreifenden Kräfte müssen sich kompensieren

$$\vec{F}_{L1L2} + \vec{F}_{L2V} + \vec{F}_{L1V} = 0 \,.$$

Wir betrachten das von diesen drei Kräften aufgespannte Dreieck. Wir benutzen den Kosinussatz bezüglich des Winkels α zwischen $\vec{F}_{L1L2}$ und $\vec{F}_{L1V}$. Für α gilt

$$\alpha = 180^\circ - \varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi \,.$$

Damit ergibt sich der Kosinussatz zu

$$|\vec{F}_{L2V}|^2 = |\vec{F}_{L1L2}|^2 + |\vec{F}_{L1V}|^2 - 2|\vec{F}_{L1L2}|\,|\vec{F}_{L1V}| \cos\alpha \,.$$

Aufgelöst nach $\cos\varphi$ gilt

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{F}_{L2V}|^2 - |\vec{F}_{L1V}|^2 - |\vec{F}_{L1L2}|^2}{2|\vec{F}_{L1V}|\,|\vec{F}_{L1L2}|}$$

Wir ersetzen wieder die Kräfte durch die jeweiligen Grenzflächenspannungen γ_i.

$$\varphi = \arccos \frac{\gamma_{L2V}^2 - \gamma_{L1V}^2 - \gamma_{L1L2}^2}{2\gamma_{L1V}\,\gamma_{L1L2}} \,.$$

2.5 Aufgabe 8

a) *Die Oberflächenspannung mit der Einheit N/m ist eine spezifische Oberflächenenergie. Also ist die Oberflächenspannung einer Kugel gegeben durch:*

$$E = \gamma A = 4\pi r^2 \gamma$$

b) *Die Oberflächenenergie eines Tropfens mit Radius r_0 und Volumen V_0 ist*

$$E_0 = 4\pi r_0^2 \gamma$$

nach dem Zusammenbringen von 2 Tropfen ist der Radius r gegeben durch

$$\frac{V}{2V_0} = \frac{r^3}{2r_0^3} \overset{!}{=} 1 \qquad \Rightarrow \ r = r_0 \sqrt[3]{2}$$

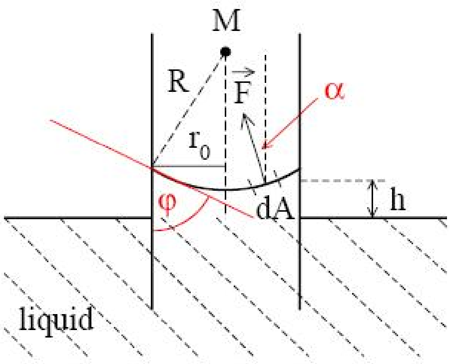
Somit ist das Verhältnis der Oberflächenenergien des verschmolzenen Tropfens zur gesamten Oberflächenenergie von zwei einzelnen Tropfen gegeben durch:

$$\frac{E}{2E_0} = \frac{r^2}{2r_0^2} = \frac{2^{2/3}}{2} = 79\%$$

c) *Energie wird frei.*

2.6 Aufgabe 9

a)



Zur Herleitung betrachte man nebenstehende Abbildung des Kapillarrohres. Wir nähern die Form der Flüssigkeitsoberfläche an der Grenzfläche zu Luft mit einem Kreis mit Radius R. Diese Annahme ist in erster Näherung gut erfüllt für kleine Durchmesser der Kapillare. Der Krümmungsradius der Oberfläche, also der Kreisradius R ergibt sich aus dem Radius der Kapillare r_0 und dem Kontaktwinkel der Flüssigkeit an der Wand der Kapillare φ zu

$$R = \frac{r_0}{\cos\varphi}.$$

Die Oberflächenspannung an der Grenzfläche Flüssigkeit-Luft in der Kapillare sei mit γ_{LV} bezeichnet. Gesucht ist die Kraft F_z, die entlang der Kapillare an der Flüssigkeit angreift. Wir betrachten dazu zunächst die Druckänderung ΔP auf die Flüssigkeitsoberfläche. Dieser ist gegeben durch die Kraftänderung dF, die an einem Flächenelement dA der Flüssigkeitsoberfläche angreift, also

$$\Delta P = \frac{dF}{dA}\,.$$

Die Änderung des Drucks läßt sich zur Oberflächenspannung an der Grenzfläche Flüssigkeit-Luft in Beziehung setzen. Wir betrachten dazu die Arbeit, die bei Änderung des Radius der Kugeloberfläche um ΔR durch die Änderung des Drucks verrichtet wird und setzen diese in Beziehung zur Änderung der Oberflächenenergie bei Änderung der Flüssigkeitsoberfläche durch Ändern des Radius um ΔR

$$\Delta P\, 4\,\pi\, r^2\, \Delta r = \gamma_{LV}\, 4\,\pi\, (R^2 - (R - \Delta R)^2)\,.$$

Auflösen nach ΔP unter Vernachlässigung der Terme in ΔR^2 ergibt

$$\Delta P = \frac{2\,\gamma_{LV}}{R} = \frac{2\,\gamma_{LV}}{r_0}\,\cos\varphi\,.$$

Damit ergibt sich für die Kraft auf ein Flüssigkeitsoberflächenelement

$$dF = \Delta P\, dA = \frac{2\,\gamma_{LV}}{r_0}\,\cos\varphi\, dA\,.$$

Diese Kraft ist in Richtung des Mittelpunkts M gerichtet. Relevant für die Kompensation der Schwerkraft der Flüssigkeit ist jedoch nur die Kraft entlang der Kapillare dF_z, wir betrachten also die Projektion der Kraft unter Verwendung des Winkels α.

$$dF_z = \frac{2\,\gamma_{LV}}{r_0}\,\cos\varphi\, dA\,\cos\alpha\,.$$

$dA\,\cos\alpha$ ist dabei die Projektion des gekrümmten Flächenelements dA in die Ebene senkrecht zur Kraft z. Die Querschnittsfläche der Kapillare ist ein Kreis mit Radius r_0. Folglich ergibt sich für die Gesamtkraft in z-Richtung nach Integration

$$F_z = \frac{2\,\gamma_{LV}}{r_0}\,\cos\varphi\,\pi\, r_0^2 = 2\,\pi\,\gamma_{LV}\, r_0\,\cos\varphi\,.$$

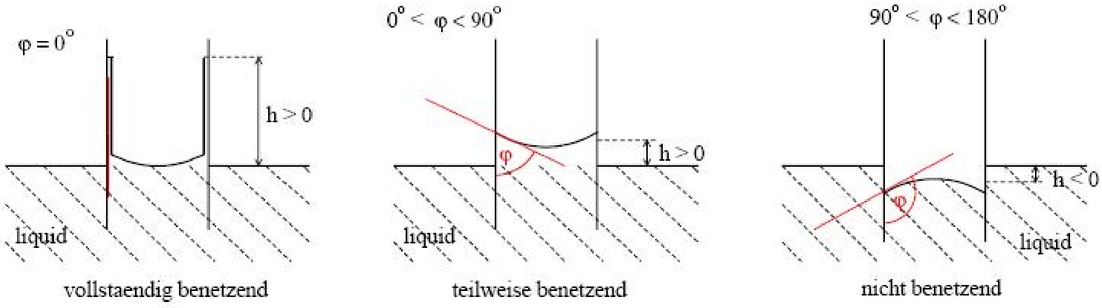
Im Gleichgewicht muss F_z gleich der Gewichtskraft der in der Kapillare befindlichen Flüssigkeitssäule sein. Also

$$F_z = m\, g = \rho\,\pi\, r_0^2\, h\, g\,.$$

Hierbei wurde verwendet, dass die Oberfläche nur schwach gekrümmt ist, da h die Höhe gemessen von der Flüssigkeitsoberfläche außerhalb der Kapillare zur Höhe am Mittelpunkt der gekrümmten Oberfläche bezeichnet. Aus der oben angegebenen Gleichung berechnet sich der Kontaktwinkel φ zu

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\rho\, g\, h\, r_0}{2\,\gamma_{LV}}\right)\,.$$

Für den Kontaktwinkel gelten die unter Teilaufgabe 1 a) dargestellten Annahmen für den Einfluß der Grenzflächenspannungen. Es lassen sich folgende drei Fälle unterscheiden:



Im Fall der vollständig benetzenden Flüssigkeit gilt $\gamma_{SV} > \gamma_{LV} + \gamma_{LS}$ (Beispiel Öl auf Wasser, oder in erster Näherung superflüssiges Helium). Für die teilweise benetzende Flüssigkeit ist $\gamma_{SV} > \gamma_{LS}$ und $\gamma_{SV} - \gamma_{LS} < \gamma_{LV}$. Für nicht benetzende Flüssigkeiten gilt $\gamma_{SV} < \gamma_{LS}$ und $|\gamma_{SV} - \gamma_{LS}| < \gamma_{LV}$.

b) Quecksilber zeigt Kapillardepression, da der Winkel φ an der Grenzfläche größer als 90° ist. Die Höhe h des Quecksilbers im Rohr berechnet sich zu

$$h = \frac{2\,0.475\,\mathrm{N\,m^{-1}}\,\cos 138^\circ}{0.4\,\mathrm{mm}\,9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,13545\,\mathrm{kg\,m^{-3}}} = -1.33\,\mathrm{cm}\,.$$

2.7 Aufgabe 10

Wir bezeichnen mit ρ die Dichte des Körpers, mit V sein Volumen und mit V' das Volumen des von ihm verdrängten Wassers, wenn er darin schwimmt. Dabei gleicht die Auftriebskraft im Wasser (mit der Dichte ρ_w) die Gewichtskraft mg des Körpers aus:

$$\rho_w V' g - mg = \rho_w V' g - \rho V g = 0 \quad (1)$$

Mit $\frac{V'}{V} = 0,8$ ergibt sich daraus die Dichte zu:

$$\rho = \rho_w \frac{V'}{V} = 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 0,8 = 800 \frac{kg}{m^3}$$

Aus Gleichung (1) folgt damit $mg = 0,8 \rho_w V g$. Diese Gewichtskraft ist ebenso groß wie die Auftriebskraft in der anderen Flüssigkeit (mit der Dichte ρ_{fl}), wobei gilt:

$$mg = 0,72 \cdot \rho_{fl} V g$$

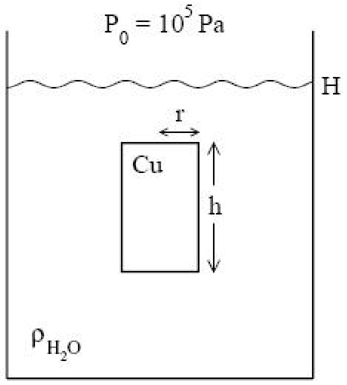
Gleichsetzen beider Ausdrücke für die Gewichtskraft ergibt

$$0,72 \rho_{fl} = 0,8 \rho_w$$

Daraus erhalten wir schließlich das relative Gewicht der Flüssigkeit:

$$\frac{\rho_{fl}}{\rho_w} = \frac{0,8}{0,72} = 1,11$$

2.8 Aufgabe 11



a) Die Masse des Zylinders berechnet sich zu

$$M_Z = \rho\, V_Z = \rho\, \pi\, r^2\, h = 8920\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\,\pi\,(0.1\,\mathrm{m})^2 0.2\,\mathrm{m} = 56.05\,\mathrm{kg}\,.$$

Die Auftriebskraft F_{A_Z} auf den Zylinder ist gegeben durch die Gewichtskraft der verdrängten Masse des Wassers.

$$F_{A_Z} = \rho_{H2O}\, V_Z\, g = \rho_{H2O}\, \pi\, r^2\, h\, g = 61.82\,\mathrm{N}\,.$$

Der Zylinder sinkt folglich auf den Boden des Tanks, da seine Gewichtskraft $M_z\, g$ größer als die Auftriebskraft ist.

b) Damit der Zylinder schwebt, muss die Auftriebskraft gerade die Gewichtskraft, die auf den Zylinder wirkt, kompensieren. Folglich muss es sich bei dem Zylinder um einen Hohlzylinder handeln.

$$F_A = F_G$$

$$\rho_Z\, V_Z'\, g = \rho_{H2O}\, V_Z'\, g$$

Also muss die mittlere Dichte des schwebenden Zylinders gleich der Dichte von Wasser sein. Damit gilt für das Volumen des schwebenden Zylinders

$$V_Z' = \frac{\rho}{\rho_{H2O}}\, V_Z = 8.9 V_Z = 55.9\,\mathrm{l}\,.$$

Die im Zylinder eingeschlossene Luft wurde bei dieser Berechnung vernachlässigt. Die Dichte ist jedoch um einen Faktor 1000 kleiner als die Dichte von Kupfer.

c) Der Zylinder schwebt im Wasser. Für den Luftdruck, der im Hohlzylinder herrscht gilt

$$P = \frac{F_{H2O}}{A} + P_0\,.$$

Mit $F_{H2O} = \rho_{H2O}\, g\, A\, h_Z$ folgt

$$P = \rho_{H2O}\, g\, h_Z + P_0 = 1.098 \cdot 10^5\,\mathrm{N\,m^{-2}}\,.$$

3 Für Profis

3.1 Aufgabe 12

a) Die Masse der Stange berechnet sich zu

$$m_S = \rho V = \rho\,\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 L = 1.7865\,\mathrm{kg}\,.$$

Die Poissonzahl μ verknüpft die Dehnung mit der Querkontraktion. Also gilt

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{F/A}{E}\,(1-2\mu)$$

und $\mu = \frac{\Delta r}{r} / \frac{\Delta L}{L}$. Wir betrachten den Fall, in dem sich das Volumen des Körpers nicht ändert. Folglich gilt $\mu = 1/2$. Somit folgt

$$F/A = E\,\Delta L/L\,.$$

Die durch die Stange hervorgerufene Längenänderung des Seil ΔL berechnet sich zu

$$\frac{m_S\,g}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}\,\frac{0.5}{E} = \Delta L \Rightarrow \Delta L = 50.714\,\mu\mathrm{m}\,.$$

Mit $\mu = 0.5$ folgt für die Änderung des Radius des Seils

$$\Delta r = \frac{\Delta L\,\mu}{L}\,r = 25.357\,\mu\mathrm{m}\,.$$

Die Änderung des Durchmessers entspricht $2\,\Delta r$.

b) Das Seil wird um den Winkel φ geschert. Für die Scherspannung τ gilt

$$\tau = G\frac{r\,\varphi}{L}\,.$$

Die Kraft dF, welche für die Scherung aufgewendet werden muss, ergibt sich zu

$$dF = \tau\,2\,\pi\,r\,dr = \frac{2\,\pi\,r^2\,dr\,\varphi}{L}\,G\,.$$

Somit ergibt sich das Drehmoment, welches auf einen Zylinder (Seil) mit Radius r aufgrund der Kraft dF wirkt

$$dD = r\,dF = \frac{2\,\pi\,r^3\,dr\,\varphi}{L}\,G\,.$$

Durch Integration über den Zylinderradius ergibt sich das Drehmoment D zu

$$D = \int_0^r dD = \frac{\pi\,G\,r^4}{2\,L}\,\varphi = D_r\,\varphi\,.$$

Die Arbeit $W(\varphi)$, die bei Verdrillen des Seils um den Winkel φ verrichtet werden muss ergibt si

$$W(\varphi) = \int_0^{\varphi} D(\varphi')\, d\varphi' = \frac{\pi\, G\, r^4}{4\, L}\, \varphi^2 \,.$$

c) Die Bewegungsgleichung für das Torsionspendel lautet

$$-D_r\, \varphi = \Theta \ddot{\varphi} \,.$$

Das Trägheitsmoment Θ der Stange lautet

$$\Theta = \frac{1}{12}\, m_s\, L_s^2 \,.$$

Das Trägheitsmoment des Seils wird vernachlässigt. Folglich lautet die Bewegungsgleichung

$$-\frac{\pi\, G\, r^4}{2\, L}\, \varphi = \frac{1}{12}\, m_s\, L_s^2\, \ddot{\varphi} \,.$$

Lösung der Differentialgleichung mit dem Ansatz $\varphi(t) = A \cdot \cos(\omega\, t)$ mit $\omega\, t = \varphi$.
Somit folgt $\ddot{\varphi} = -A\omega^2 \cos(\omega\, t)$.
Damit gilt $\omega = \sqrt{\frac{D_r}{\Theta}}$. Für die Periodendauer der Torsionsschwingung T gilt

$$T = 2\,\pi \sqrt{\frac{D_r}{\Theta}} = 2\,\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{12}\, L_s^2\, m_s}{\frac{\pi\, G\, r^4}{2\, L}}} = \sqrt{\frac{2\,\pi\, L_s^2\, m_s\, L}{3\, r^4\, G}}$$

Somit gilt

$$T = 9.3828\,\mathrm{s} \,.$$

3.2 Aufgabe 13

a) Flächenträgheitsmoment

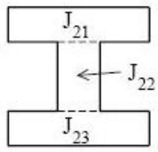
$$J_i = \int\limits_F z^2 \, dy \, dz$$

Die z Richtung ist antiparallel zur angreifenden Kraft.

Für den Balken gilt

$$J_1 = \int\limits_{-b/2}^{b/2} \int\limits_{-a/2}^{a/2} z^2 \, dz \, dy = \frac{1}{12} \, a \, b^3 \, .$$

Für den Doppel-T-Träger gilt unter Berücksichtigung der Additivität der Flächenträgheitsmomente



$$J_2 = \sum_{i=1}^{3} J_{2i} \, .$$

Die Flächenträgheitsmomente J_{2i} können aus der Abbildung abgelesen werden.

Es gilt

$$J_{21} = \int\limits_{b_2/2}^{b_1/2} \int\limits_{-a/2}^{a/2} z^2 \, dz \, dy = \frac{a}{24} \left(b_1^3 - b_2^3 \right)$$

$$J_{22} = \int\limits_{-b_2/2}^{b_2/2} \int\limits_{-a/2+a_1/2}^{a/2-a_1/2} z^2 \, dz \, dy = (a - a_1) \, \frac{1}{3} \left[\left(\frac{b_2}{2} \right)^3 - \left(-\frac{b_2}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{12} \, (a - a_1) \, b_2^3$$

$$J_{23} = \int\limits_{-b_1/2}^{-b_2/2} \int\limits_{-a/2}^{a/2} z^2 \, dz \, dy = \frac{a}{3} \left[\left(-\frac{b_2}{2} \right)^3 - \left(-\frac{b_1}{2} \right)^3 \right] = \frac{a}{24} \left(b_1^3 - b_2^3 \right) \, .$$

Somit gilt

$$J_2 = \frac{a}{24} \left(b_1^3 - b_2^3 \right) + \frac{1}{12} \, (a - a_1) \, b_2^3 + \frac{a}{24} \left(b_1^3 - b_2^3 \right) = \frac{1}{12} \left(a \, b_1^3 - a_1 \, b_2^3 \right) \, .$$

b) Beim Biegen des Balkens wirkt auf jede Faser des Balkens eine Zugspannung für $z > 0$ und ein Kompressionsdruck für $z < 0$. $z = 0$ entspricht der Balkenmitte. Für die Zugspannung gilt

$$\sigma = \frac{E \, \Delta l}{l} = z \, \frac{E}{r} \, .$$

r bezeichnet den Radius der Krümmung es gilt $l = r \, \varphi$ und $\Delta l = z \, \varphi = z \, \frac{l}{r}$. E bezeichnet den Elastizitätsmodul.

Die Kraft, die an der Faser im Abstand z von der Mitte angreift, lautet

$$dF = \sigma \, a \, dz = \frac{a \, E \, z}{r} \, dz \, .$$

a bezeichnet die Breite des Balkens. Die Kraft dF im Abstand z verursacht ein Drehmoment dM_y

$$dM_y = z\,dF = \frac{a\,E\,z^2}{r}\,dz\,.$$

Das Gesamtdrehmoment M_y für den Balken ergibt sich durch Integration über z zu

$$M_{y_B} = \frac{a\,E}{r}\int\limits_{-b/2}^{b/2} z^2\,dz = \frac{a\,E\,b^3}{12\,r} = \frac{E\,J_1}{r}\,.$$

Analog gilt für den Doppel-T-Träger

$$dM_{y1} = z\,dF_1 = \frac{a\,E\,z^2}{r}\,dz \Rightarrow M_{y1} = \frac{a\,E}{r}\int\limits_{b_2/2}^{b_1/2} z^2\,dz + \frac{a\,E}{r}\int\limits_{-b_1/2}^{-b_2/2} z^2\,dz$$

und

$$dM_{y2} = z\,dF_2 = \frac{(a-a_1)\,E\,z^2}{r}\,dz \Rightarrow M_{y2} = \frac{(a-a_1)\,E}{r}\int\limits_{-b_2/2}^{b_2/2} z^2\,dz\,.$$

Damit gilt für das Gesamtdrehmoment auf den Doppel-T-Träger

$$M_{y_T} = \frac{E}{12\,r}\left(a\,b_1^3 - a_1\,b_2^3\right) = \frac{E\,J_2}{r}\,.$$

c) Die maximale Biegestrecke ergibt sich über

$$M_y = F\,(L-x)$$

an jedem Punkt x. Es gilt für beide Drehmomente

$$M_{y_i} = \frac{E}{r_i}\,J_i = F\,(L-x)\,.$$

Folglich ergibt sich die Krümmung des Balkens bzw. Doppel-T-Trägers zu

$$\frac{1}{r_i} = \frac{F\,(L-x)}{E\,J_i}\,.$$

Gesucht ist $z(x) = 0$, d. h. die unbelastete Äquipotentiallinie, d. h.

$$\frac{1}{r} = \frac{z''(x)}{\left(1+z'(x)^2\right)^{3/2}} \quad \text{mit} \quad z'(x) \ll 1$$

folgt

$$\frac{1}{r} \simeq z''(x) = \frac{F(L-x)}{E\,J_i}\,.$$

Anmerkungen: Die Defintion der Krümmung einer ebenen Kurve im Raum wird in der Differentialgeometrie gezeigt (Bronstein oder ein Buch zur Differentialgeometrie konsultieren.). Man kann sich dies auch durch lokale Näherung mit einem Kreis veranschaulichen. Die Herleitung für das Problem des Durchbiegens eines Balkens ist z. B. im Demtröder nachzuvollziehen. Die Näherung $\frac{1}{r} \simeq z''(x)$ kann man sich leicht dadurch veranschaulichen, dass für kleine Änderungen der Biegung des Balkens die lokale Steigung der Kurve, also $z'(x)$, sehr klein ist.

Durch zweifache Integration über x ergibt sich die Auslenkung des Balkens am Ort x zu

$$z(x) = \frac{F}{2\,E\,J_i}\,L\,x^2 - \frac{F}{6\,E\,J_i}\,x^3\,.$$

Somit gilt für die maximale Durchbiegung des Balkens im Abstand $x = L$ vom Auflagepunkt

$$z(x=L) = z_0 = \frac{F}{3\,E\,J_i}\,L^3\,.$$

d) Es sind folgende Größen für den Balken und den Doppel-T-Träger gegeben

$a = 0.1\,\mathrm{m} \quad b = b_1 = 0.1\,\mathrm{m} \quad L = 1\,\mathrm{m} \quad a_1 = 0.08\,\mathrm{m} \quad b_2 = 0.075\,\mathrm{m} \quad E = 70\,\mathrm{GN\,m^{-2}} \quad F = 10^4\,\mathrm{N}\,.$

Für den Balken gilt mit $J_1 = \frac{1}{12}\,a\,b^3$

$$z_1 = \frac{4\,F}{E\,a\,b^3}\,L^3 = 5.71\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\,.$$

Für den Doppel-T-Träger gilt

$$z_2 = \frac{4\,F}{E\,(a\,b_1^3 - a_1\,b_2^3)}\,L^3 = 8.63\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\,.$$

e) Für gleiche Durchbiegung, d. h. $z_1 = z_2$ unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $\frac{b_1}{b_2} = const. = \frac{4}{3}$, a und a_1 konstant, gilt

$$\frac{4\,L^3}{E\,a\,b^3}\,F = \frac{4\,L^3}{E\,(a\,b_1^3 - a_1\,b_2^3)}\,F$$

$$a\,b^3 = \left(a\,b_1^3 - \frac{9}{16}\,a_1\,b_1^3\right)$$

$$b_1 = \sqrt[3]{\frac{a\,b^3}{a - \frac{27}{64}\,a_1}} = 11.5\,\mathrm{cm} = 1.15\,b\,.$$

Für die Masse des Balkens gilt

$$m_B = \rho\,V_B = \rho\,L\,a\,b\,.$$

Für die Masse des Doppel-T-Trägers gilt

$$m_T = \rho\,V_T = \rho\,L\,\Delta F = \rho\,L\,(a\,b_1 - a_1\,b_2)\,.$$

Mit den Bedingungen für die Längenverhältnisse $b_2 = \frac{3}{4}\,b_1$ und $a_1 = \frac{4}{5}\,a$gilt

$$m_T = \rho\,L\,a\,b_1\,\frac{2}{5} = \rho\,L\,a\,b\,1.15\,\frac{2}{5}\,.$$

Daraus folgt

$$m_T = 0.46\,m_B\,.$$

Folglich ist der Doppel-T-Träger um 54% leichter als der solide Balken bei gleicher Biegefestigkeit.