
Andreas Brenneis; Rebecca Saive; Felicitas Thorne

Mechanik deformierbarer Körper und Hydrostatik

Dienstag, 29. Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Deformierbare feste Körper	1
1.1	Beschreibung von Festkörpern	1
1.2	Das Hookesche Gesetz	1
1.3	Querkontraktion	2
1.4	Scherung und Torsionsmodul	2
1.5	Anwendungsbeispiel: Biegung eines Balkens	3
2	Hydrostatik	4
2.1	Beschreibung von Flüssigkeiten	4
2.2	Statischer Druck in einer Flüssigkeit	4
2.3	Schweredruck einer Flüssigkeit	5
2.4	Auftrieb	6
2.5	Phänomene an Flüssigkeitsgrenzflächen	6
2.5.1	Oberflächenspannung und spezifische Oberflächenenergie	6
2.5.2	Grenzflächen und Haftspannung	7
2.5.3	Kapillarität	8

1 Deformierbare feste Körper

1.1 Beschreibung von Festkörpern

Nachdem in den vorherigen Abschnitten die Mechanik von Massepunkten und ausgedehnten starren Körpern untersucht worden ist, sollen diese Modelle besser an die Realität angepasst werden, denn insbesondere Festkörper lassen sich in der Regel nicht als Massepunkt darstellen und das Experiment zeigt, dass sie auch nicht vollständig starr sind, sondern durch Krafteinwirkung verformt werden können.

Bevor die Verformung fester Körper näher betrachtet wird, soll zunächst ein Modell vorgestellt werden, wie man sich den Aufbau eines Festkörpers vorstellen kann. Die folgenden Begriffsdefinitionen gelten für alle Aggregatzustände, d.h. für Festkörper, Flüssigkeiten und Gase:

Homogen: Eine Substanz heißt homogen, wenn in ihrem Inneren die physikalischen Eigenschaften im makroskopischen Maßstab überall gleich sind.

Isotrop: Eine Substanz heißt isotrop, wenn ihre physikalischen Eigenschaften von der Richtung unabhängig sind.

Es ist wichtig, sich zu merken, dass die meisten Festkörper anisotrop sind, d.h. die physikalischen Eigenschaften verändern sich in Abhängigkeit der Richtung.

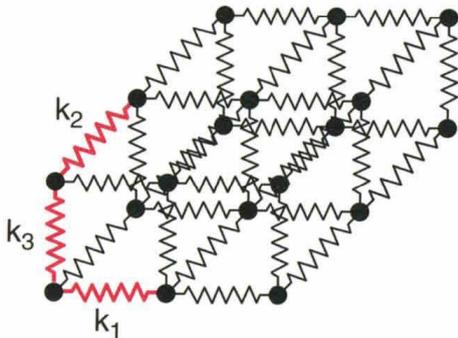


Abbildung 1: Federmodell des Festkörpers

In Abbildung 1 ist das Federmodell des Festkörpers dargestellt. In jeder Raumdimension sind die Bindungen zwischen den Atomen durch Federn mit den Federkonstanten k_i dargestellt. Dabei können die Federkonstanten durchaus unterschiedlich sein.

Dies Modell berücksichtigt, dass die Atome sich gegenseitig abstoßen, wenn sie zu nahe beieinander sind, und sich anziehen, wenn ihr Gleichgewichtsabstand vergrößert wird. Wenn die Temperatur T des Festkörpers erhöht wird, setzen die Atome diese zusätzliche thermische Energie in kinetische Energie um. Erhöht sich die Temperatur über die Schmelztemperatur, so reicht die Bindungsenergie nicht mehr aus, um die Atome im Gitter festzuhalten, die Struktur löst sich auf und der Festkörper schmilzt.

1.2 Das Hookesche Gesetz

Wirkt auf einen Festkörper eine externe Kraft \vec{F} , so ändert der Körper seine Gestalt. Man unterscheidet: **Elastische** Verformung: Der Endzustand des Körpers nach Einwirkung der Kraft ist reversibel, d.h. der Körper kann seine ursprüngliche Gestalt wieder annehmen.

Plastische Verformung: Die Formänderung ist irreversibel, d.h. der Festkörper kann seinen Ausgangszustand nach dem Einwirken der Kraft nicht wieder annehmen. Hierzu gehört auch die Zerstörung des Festkörpers.

Wird nun das Federmodell auf einen Festkörper angewendet, auf den die externe Kraft \vec{F} senkrecht zu einer der Seitenflächen A wirkt, so lässt sich die Dehnung des Körpers in der Idealisierung, dass die Bindungen im Festkörper durch Federn genähert werden können, durch das Hookesche Gesetz beschreiben, welches besagt, dass die Dehnung proportional zur angewandten Kraft ist: $F = |\vec{F}| = k \cdot \Delta x$. Die

Proportionalitätskonstante k muss dabei die Einheit $\frac{\text{N}}{\text{m}}$ haben.

Aus Experimenten findet man folgenden Zusammenhang, solange die Verformung elastisch ist, d.h. für Δx klein genug:

$$F = E \cdot A \frac{\Delta x}{L} \quad (1)$$

Hierbei ist L die ursprüngliche Länge des Körpers und Δx (siehe auch Abbildung 2).

Mit den folgenden Definitionen lässt sich Gleichung 1 auch noch auf eine andere Weise schreiben:

Elastizitätsmodul E : Das Elastizitätsmodul ist eine materialspezifische Konstante und hat die Einheit

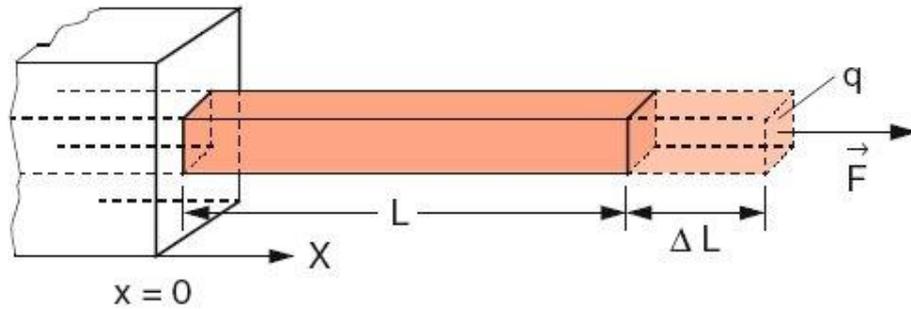


Abbildung 2: Dehnung eines Stabes

$\frac{N}{m^2}$. Je größer das Elastizitätsmodul eines Körpers bzw. Materials ist, umso größer ist die für eine feste Längenänderung vorgegebene Kraft.

Zugspannung σ : Die Zugspannung ist definiert, als die Kraft, die pro Fläche angewandt wird, um den Körper zu dehnen:

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{F}}{A}$$

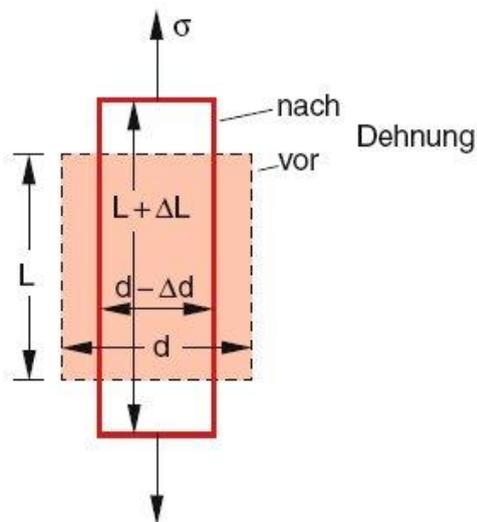
Führt man zuletzt noch die relative Dehnung

$$\epsilon = \frac{\Delta x}{L}$$

ein, so ergibt sich schließlich für das Hookesche Gesetz folgende Form:

$$\sigma = E\epsilon \quad (2)$$

1.3 Querkontraktion



Bisher wurde nur die Dehnung in eine Raumrichtung betrachtet. Im dreidimensionalen Raum muss man jedoch beachten, dass eine Dehnung in z-Richtung eine Kontraktion in x- und y-Richtung zur Folge hat, wenn die externe Kraft in z-Richtung senkrecht zur Oberfläche angreift (vgl. auch Abbildung 3).

Je nachdem, ob der Effekt der Kontraktion oder der Dehnung größer ist, kann sich das Volumen des Körpers verkleinern oder vergrößern.

Ein Maß hierfür ist die Querkontraktionszahl oder Poissonzahl μ die über das Verhältnis von Querkontraktion zu Dehnung:

$$\mu = -\frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta L}{L}}$$

Abbildung 3: Querkontraktion eines Festkörpers

1.4 Scherung und Torsionsmodul

Greift die externe Kraft nicht mehr senkrecht zu einer Fläche des Festkörpers an, sondern tangential zur Fläche, so spricht man in diesem speziellen Fall von einer Scherkraft. Analog zur Zugspannung σ lässt sich hier eine Schub- bzw. Scherspannung τ definieren:

$$\vec{F} = \vec{\tau} \cdot A$$

Sie ist die pro Flächeneinheit tangential auf den Körper wirkende Kraft.

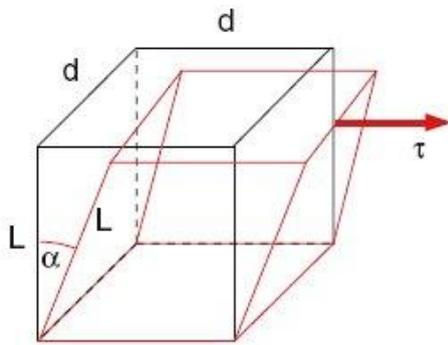


Abbildung 4: Scherung eines Festkörpers

Abbildung 4 illustriert die Wirkung einer Scherkraft auf einen Körper: Die Kantenlinien des Körpers werden alle um einen konstanten Winkel α verkippt, welcher abhängig vom Betrag der wirkenden Kraft ist. Bei kleinem Scherwinkel α findet man experimentell ein Analogon zu 2 finden:

$$\tau = G \cdot \alpha$$

Die Proportionalitätskonstante G wird Schubmodul genannt. Zum Teil findet man in der Literatur für G auch die Begriffe Schermodul oder Torsionsmodul.

1.5 Anwendungsbeispiel: Biegung eines Balkens

Zum Abschluss des Kapitels über die Verformung von Festkörpern unter Krafteinwirkung wird noch ein wichtiges Anwendungsbeispiel betrachtet: Die Durchbiegung von Balken bzw. Träger jeglicher Form unter dem Einfluss ihrer Gewichtskraft.

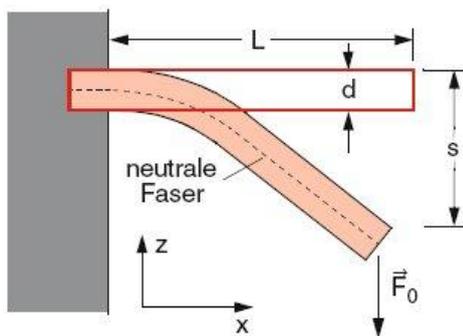


Abbildung 5: Biegung eines Balkens

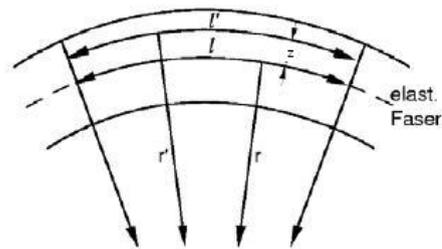


Abbildung 6: Vergrößerter Ausschnitt von Abb. 5

Abbildung 5 zeigt die gegebene Situation. Vergrößert man das Bild, so erhält man Abbildung 6.

Elastische Faser: Die elastische Faser Linie im Balkenquerschnitt, welche vor und nach der Krafteinwirkung die gleiche Länge hat.

Oberhalb der elastischen Faser herrscht Zugspannung, unterhalb Druckspannung. Die Wirkung der Gewichtskraft \vec{F}_0 lässt sich äquivalent also auch durch eine Zugkraft in x-Richtung beschreiben. Das Ziel ist es, die Durchbiegung s des Trägers bestimmen zu können.

Dazu benötigt man erst einmal die relative Dehnung ϵ des Trägers in x-Richtung. Mit den Strahlensätzen ergibt sich das Verhältnis

$$\frac{r'}{r} = \frac{r+z}{r} = \frac{l'}{l} \Leftrightarrow \frac{z}{r} = \frac{l'}{l} - 1$$

und damit die relative Dehnung zu

$$\epsilon = \frac{l' - l}{l} = \frac{l'}{l} - 1 = \frac{z}{r}$$

Mit dem Hookschen Gesetz in vereinfachter Form (Gleichung 2 lautet die Zugspannung σ

$$\sigma = E \frac{z}{r}$$

womit man als infinitesimale Zugkraft

$$F = \sigma \cdot dA$$

und letztendlich das Drehmoment

$$M = \int E \frac{z^2}{r} \cdot dA$$

erhält. Im letzten Schritt wurde die Gleichung $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$ verwendet, wobei beachtet wurde, dass $\vec{F} \perp z$ gilt.

Der Krümmungsradius ist somit gegeben durch

$$r = \frac{E}{M} \int z^2 \cdot dA = \frac{E}{M} \cdot J \quad (3)$$

Mit Hilfe des Krümmungsradius lässt sich nun einfach auf die Durchbiegung s des Trägers zurückschließen. In der Herleitung wurde eine allgemeine Querschnittsfläche A des Trägers verwendet. Die Abhängigkeit des Krümmungsradius von der Form des Trägers steckt im Flächenträgheitsmoment J , welches manchmal auch Biegemoment genannt wird. Dieses ist über folgendes Integral definiert:

$$J = \int z^2 \cdot dA \quad (4)$$

wobei z den Abstand zur elastischen Faser beschreibt.

2 Hydrostatik

Die Hydrostatik beschäftigt sich mit dem physikalischen Verhalten ruhender Fluide. Als ein Fluid bezeichnet man Substanzen, welche fließen und sich der Berandung ihres Behälters anpassen können.

2.1 Beschreibung von Flüssigkeiten

Bevor das Verhalten von Flüssigkeiten unter verschiedenen Bedingungen untersucht werden kann, muss zunächst wieder ein Modell erstellt werden, welches es uns ermöglicht, Flüssigkeiten zu beschreiben. Dafür wird das Federmodell des Festkörpers abgewandelt.

Wie zu Beginn beschrieben, führt eine Erhöhung der Temperatur des Festkörpers zu einer höheren kinetischen Energie der Moleküle. Durch starke Bewegung der Atome können die Bindungen, welche den Festkörper zusammenhalten zerstört werden. Bildlich lässt sich dies mit dem Überspannen einer Feder vergleichen. Einige der Federn (Bindungen) sind soweit plastisch verformt, dass sie im Prinzip nur noch einem geraden Stück Draht ähneln, andere sind hingegen vollkommen zerstört.

Dies ist der Zustand, in welchem man sich eine Flüssigkeit vorstellen kann: Die Moleküle sind nicht mehr durch Federn miteinander verbunden, wie im Festkörper, sondern mit Schnüren einer bestimmten Länge. Dadurch lassen sie sich innerhalb des Volumens, in welchem sie sich befinden, frei verschieben. Im Vergleich zum festen Zustand hat die Substanz im flüssigen Zustand einen größeren Gleichgewichtsabstand zwischen ihren Molekülen.

Will man nun eine tangential Kraft auf die Oberfläche der Flüssigkeit wirken lassen, so findet man, dass sich die Flüssigkeitsmoleküle innerhalb ihres Volumens solange verschieben, bis die Tangentialkraft verschwindet. Somit lassen sich zwei Grundregeln für ideale Flüssigkeiten erstellen:

Das Schubmodul G einer idealen Flüssigkeit ist Null, d.h. in einer Flüssigkeit treten keine stationären Scherkräfte auf.

Die Oberfläche einer idealen Flüssigkeit steht immer senkrecht zu der auf der Flüssigkeit wirkenden Gesamtkraft.

2.2 Statischer Druck in einer Flüssigkeit

Zur Beschreibung des physikalischen Verhaltens von Flüssigkeiten ist der Druck p , der an einer bestimmten Stelle in der Flüssigkeit herrscht eine wichtige Größe. Er ist definiert als die Kraft, die auf eine bestimmte Fläche wirkt (analog zum Druck auf Festkörper):

$$p = \frac{F}{A} \quad (5)$$

Der Druck wird in der Einheit $\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 0,01 \text{mbar}$ angegeben.

Um zu verstehen, wie der Druck in einer Flüssigkeit verteilt ist, betrachtet man zunächst ein vereinfachtes Modell, in welchem die Gewichtskraft der Flüssigkeit vernachlässigt wird. Nimmt man sich aus einer Flüssigkeit ein Volumenelement $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ heraus, wie dies in Abbildung 7 gezeigt ist, lässt sich

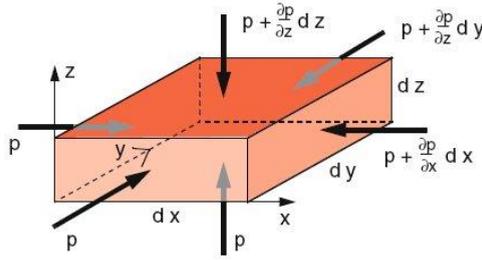


Abbildung 7: Druck auf ein Flüssigkeitselement

die Kraft, welche darauf wirkt wie folgt bestimmen:

Nach Gleichung 5 ist die Kraftkomponente in x-Richtung bestimmt durch den Druck, welcher in x-Richtung herrscht, multipliziert mit dem entsprechenden Flächenelement. Gibt es keine Druckänderung in x-Richtung, so herrscht trivialerweise auch keine effektive Kraft in diese Richtung. Ändert sich der Druck jedoch in Abhängigkeit von x, so die effektive Kraft in x-Richtung, die Differenz der Kraft bei $x = 0$ und der Kraft bei $x = L$:

$$F_x = p \cdot dy \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV$$

Mit analogen Überlegungen erhält man die effektiven Kräfte in y- und z-Richtung, die auf das Volumenelement einwirken. Zusammenfassend erhält man also folgende Beziehung zwischen der Kraft auf das Flüssigkeitselement und dem Druck in der Flüssigkeit:

$$\vec{F} = -\text{grad}(p) \cdot dV \quad (6)$$

Aber wie oben erklärt, ist die mittlere Kraft, die auf ein Flüssigkeitsmolekül wirkt Null. Das bedeutet, bei nicht verschwindendem Volumenelement und unter Vernachlässigung der Gewichtskraft der Flüssigkeit, dass der $\text{grad}(p) = 0$ sein muss. Dies wiederum hat zur Folge, dass der Druck innerhalb des Flüssigkeitselements überall gleich groß ist.

Aus diesen Gedanken leitet sich das **Pascal'sche Prinzip** ab (Allseitigkeit des Druckes):

Wird auf eine Flüssigkeit in einem Gefäß ein externer Druck ausgeübt, so verteilt sich der Druck gleichmäßig auf jedes Volumenelement der Flüssigkeit und auf die Wand des Gefäßes.

2.3 Schweredruck einer Flüssigkeit

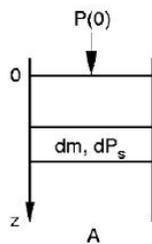


Abbildung 8: Zur Herleitung des Schweredruckes

Jetzt soll der Einfluss des Eigengewichts der Flüssigkeit auf den Druck in der Flüssigkeit untersucht werden. Dazu wird eine Flüssigkeitssäule betrachtet, wie sie in Abbildung 8 gezeigt ist.

Teilt man die Flüssigkeitssäule in infinitesimale Volumenelemente auf, so enthält ein Element die infinitesimale Masse

$$dm = \rho \cdot A \cdot dz$$

Hierbei wurde die Definition der Dichte $\rho = \frac{m}{V}$ verwendet.

Außerdem wurde die Annahme gemacht, dass die Dichte der Flüssigkeit unabhängig vom betrachteten Ort ist (also auch von der Tiefe), d.h. $\rho = \text{const.}$ Die Gültigkeit dieser Annahme lässt sich wieder über die freie Verschiebbarkeit der Flüssigkeitsmoleküle begründen.

Der hydrostatische Schweredruck P_s lässt sich nun wie folgt berechnen:

$$dP_s = \frac{dF}{A} = \frac{dm \cdot g}{A} = \frac{\rho \cdot A \cdot g}{A} dz = \rho \cdot g \cdot dz$$

$$\Rightarrow P_s = \int_0^h dP_s = \rho \cdot g \cdot h \quad (7)$$

An Gleichung 7 kann man erkennen, dass der Druck (bis auf Konstanten) nur abhängig von der Tiefe ist und linear mit dieser zunimmt.

Damit lässt sich das **Hydrostatische Paradoxon** verstehen: Der Bodendruck in einem Gefäß ist abhängig von der Füllhöhe, nicht jedoch von der Füllmenge oder der Form des Gefäßes (vgl. auch Abbildung 9).

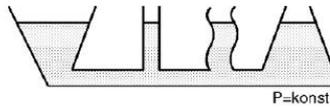
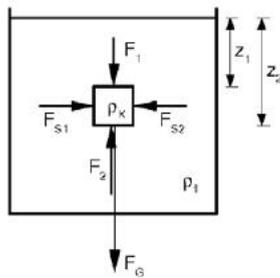


Abbildung 9: Hydrostatisches Paradoxon

2.4 Auftrieb



Wie oben gezeigt, ist der Druck in einer Flüssigkeit in unterschiedlichen Tiefen unterschiedlich groß. Befindet sich in der Flüssigkeit ein Festkörper beliebiger Geometrie, so ist der Druck an seiner Unterseite größer, als an seiner oberen Seite. Dies bedeutet aber auch, dass entsprechend die Kraft auf die Unterseite des Festkörpers größer ist, als auf dessen Oberseite (vgl. Abbildung 10).

Abbildung 10: Auftriebskraft auf einen Körper

Es ergibt sich also eine auf den Körper wirkende Kraft, welche nach oben zeigt, die sogenannte Auftriebskraft F_A . Diese lässt sich wie folgt ermitteln:

Die Kräfte auf die Seitenflächen des Körpers gleichen sich exakt aus. Mit den Gleichungen 5 und 7 ergeben sich die Kräfte auf der Ober- und Unterseite des Körpers zu $F_1 = \rho_{fl} g z_1 A$ und $F_2 = \rho_{fl} g z_2 A$. Die resultierende Kraft ist somit

$$F_A = F_2 - F_1 = \rho_{fl} g A (z_2 - z_1) = \rho_{fl} \cdot g \cdot V_K \quad (8)$$

Dabei stehen die Indizes „fl“ für flüssig und „K“ für den Körper. Man kann nun verschiedene Fälle unterscheiden:

$F_G < F_A \rightarrow \rho_K < \rho_{fl}$, d.h. der Körper schwimmt;

$F_G = F_A \rightarrow \rho_K = \rho_{fl}$, d.h. der Körper schwebt;

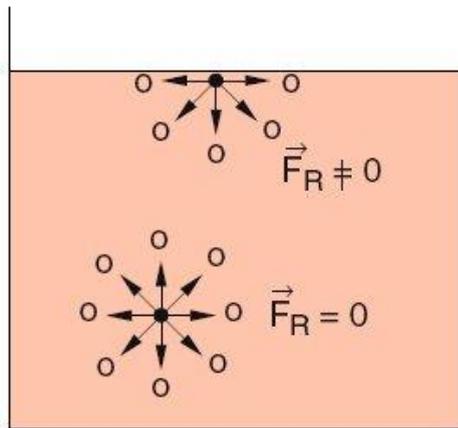
$F_G > F_A \rightarrow \rho_K > \rho_{fl}$, d.h. der Körper sinkt.

Das Phänomen des Auftriebs lässt sich als das **Archimedische Prinzip** formulieren: Die Auftriebskraft entspricht der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit und ist ihr entgegengesetzt gerichtet. Das heißt, die Schwerkraft des Körpers wird in der Flüssigkeit um die Auftriebskraft verringert.

Die Auftriebskraft tritt analog auch in Gasen auf, ist aber aufgrund der geringeren Dichte von Gasen im Vergleich zu Flüssigkeiten viel kleiner.

2.5 Phänomene an Flüssigkeitsgrenzflächen

2.5.1 Oberflächenspannung und spezifische Oberflächenenergie



In einer realen Flüssigkeit sieht die Situation leicht anders aus, als oben beschrieben. Abbildung 11 verdeutlicht, dass die auf ein Flüssigkeitsmolekül von allen anderen Molekülen ausgeübte Gesamtkraft im zeitlichen Mittel Null ist aufgrund der freien Verschiebbarkeit der Flüssigkeitsmoleküle.

Dies gilt jedoch nicht mehr für ein Molekül an der Oberfläche der Flüssigkeit. Dies wird nur noch innerhalb einer Halbkugel von anderen Molekülen angezogen, so dass eine resultierende Kraft $\vec{F}_R \neq 0$ auf das Molekül an der Oberfläche wirkt. Da die resultierende Kraft ins Innere der Flüssigkeit zeigt, muss man einen bestimmten Betrag an Energie aufwenden, um ein Molekül aus dem Inneren der Flüssigkeit an die Oberfläche zu bringen.

Abbildung 11: Resultierende Kraft auf ein Molekül innerhalb und an der Oberfläche der Flüssigkeit

Der Quotient

$$\epsilon = \frac{\Delta W}{\Delta A}$$

aus der Energie ΔW , die zur Vergrößerung der Oberfläche um ΔA nötig ist, nennt man spezifische Oberflächenenergie. Sie hat die Einheit $\frac{\text{J}}{\text{m}}$.

Durch ein einfaches Gedankenexperiment lässt sich zeigen, dass die spezifische Oberflächenenergie zur Oberflächenspannung σ identisch ist. Die Oberflächenspannung ist definiert als der Quotient aus der tangential an der Oberfläche angreifenden Zugkraft und der Länge der Kante der Oberfläche:

$$\sigma = \frac{F}{L}$$

Die Oberflächenspannung trägt die Einheit $\frac{\text{N}}{\text{m}}$.

2.5.2 Grenzflächen und Haftspannung

Analog zur Oberflächenspannung lässt sich an Grenzflächen zwischen verschiedenen Phasen eine sogenannte Grenzflächenspannung $\gamma_{i,k}$ zwischen den Phasen i und k definieren als diejenige Energie, welche aufgebracht werden muss, um die Grenzfläche der Phase i gegen die Phase k um 1m^2 zu vergrößern. Über das Vorzeichen der Grenzflächenenergie können folgende Aussagen gemacht werden:

- An flüssig-gasförmig bzw. flüssig-flüssig Grenzflächen ist $\gamma_{i,k} > 0$, da die flüssige Phase sonst Energie gewinnen könnte, indem sie in die gasförmige Phase übergeht, bzw. sich die beiden Flüssigkeiten vermischen würden.
- An fest-flüssig Grenzflächen ist $\gamma_{i,k} < 0$, wenn die Flüssigkeitsmoleküle von den Festkörpermolekülen stärker angezogen werden als von ihren Nachbarmolekülen in der Flüssigkeit, und umgekehrt.
- Fest-gasförmige Grenzflächen treten aufgrund von Adhäsion bzw. Abstoßung der Gasmoleküle vom Festkörper auf.

Nun sollen die Grenzflächen eines Dreiphasen-Systems untersucht werden. Zur Vereinfachung wird der Einfluss der Gewichtskraft auf die Grenzflächen vernachlässigt. Das System befinde sich im Gleichgewicht wie in den Abbildungen 12 gezeigt. Dann verlaufen alle Grenzflächenspannungen tangential zu den jeweiligen Grenzflächen.

Die Grenzflächenkräfte werden sich im Punkt G so einstellen, dass ihre Summe genau Null ergibt. Es gilt also:

$$\gamma_{1,2} + \gamma_{2,3} \cos(\varphi) - \gamma_{1,3}$$

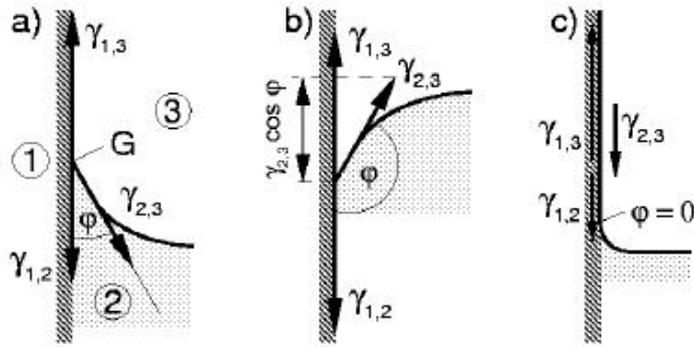


Abbildung 12: Mögliche Grenzflächen in einem Dreiphasen-System

Somit ergibt sich für den Kontaktwinkel φ :

$$\cos(\varphi) = \frac{\gamma_{1,3} - \gamma_{1,2}}{\gamma_{2,3}} \quad (9)$$

Hierbei steht 1 für fest, 2 für flüssig und 3 für gasförmig.

Es lassen sich nun drei Fälle unterscheiden, in denen die Grenzfläche abhängig vom Kontaktwinkel unterschiedliche Formen annimmt:

- $\gamma_{1,3} > \gamma_{1,2} \rightarrow \cos(\varphi) > 0 \Rightarrow \varphi < 90^\circ$: Die Flüssigkeit bildet eine konkav gekrümmte Oberfläche (siehe Abb. ?? a).
- $\gamma_{1,3} < \gamma_{1,2} \rightarrow \cos(\varphi) < 0 \Rightarrow \varphi > 90^\circ$: Benetzung, d.h. die Flüssigkeit bildet eine konvex gekrümmte Oberfläche (siehe Abb. ?? b).
- Für $\gamma_{1,3} - \gamma_{1,2} > \gamma_{2,3}$ kann Gleichung 9 nicht erfüllt werden. In diesem Fall gibt es eine starke Adhäsion der Flüssigkeit auf dem Festkörper, d.h. eine vollständige Benetzung.

2.5.3 Kapillarität

Eine wichtige experimentelle Methode, um Oberflächenspannungen zu messen, ist die Kapillarität:

Taucht man ein Rohr mit kleinem Durchmesser in eine benetzende Flüssigkeit, so steigt die Flüssigkeit im Inneren des Röhrchens um die Höhe h über den Flüssigkeitsspiegel im Becken. Dargestellt ist dies in Abbildung 13. Die Steighöhe der Flüssigkeit soll im Folgenden berechnet werden. Die Kapillare habe den

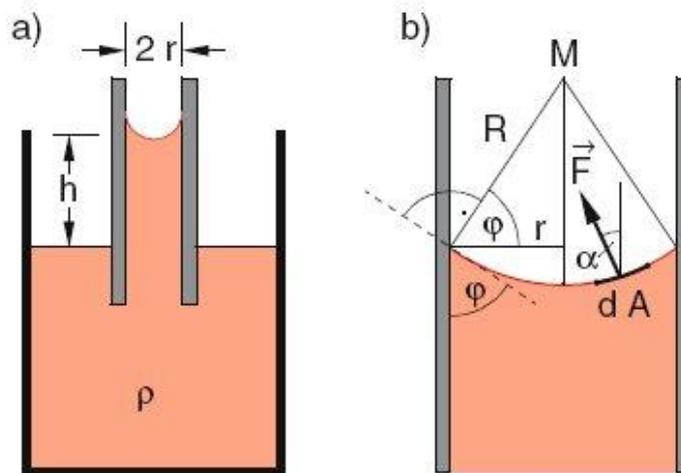


Abbildung 13: Zur Herleitung der Steighöhe in einer Kapillare

Radius r , die Flüssigkeit habe die Grenzflächenspannung σ und schließe mit der Röhre den Kontaktwinkel φ ein. Die konkav gekrümmte Oberfläche der Flüssigkeit lässt sich am besten durch eine Kugel mit dem

Radius R annähern.

Die Grenzflächenspannung sorgt dafür, dass die Flüssigkeit ihre Oberfläche verringern will. Dies bedeutet jedoch, dass der Druck im Inneren der Kugel ansteigen wird. Der Innendruck in der Kugel verrichtet gegen die Oberflächenspannung die Arbeit

$$dW_p = p_{\gamma_{2,3}} dV = 4\pi \cdot p \cdot R^2 \cdot dr$$

wohingegen die Vergrößerung der Oberfläche die Arbeit

$$dW_A = \gamma_{2,3} dA = 8\pi \cdot \gamma_{2,3} \cdot R \cdot dr$$

erfordert. Wenn sich das System im Gleichgewicht befindet, so müssen diese beiden Arbeiten identisch sein und es folgt für den Druck:

$$p_{\gamma_{2,3}} = \frac{2\gamma_{2,3}}{R}$$

Mit Gleichung 5 und dem Zusammenhang $R = \frac{r}{\cos(\varphi)}$ zwischen Kugelradius und Röhrenradius, den man sich leicht aus Abbildung 13b herleiten kann, ergibt sich aufgrund des Druckes eine nach oben gerichtete Kapillarkraft

$$F_K = 2A \cdot \gamma_{2,3} \frac{\cos(\varphi)}{r}$$

welche der Gewichtskraft des Wasser

$$F_G \cong A \cdot h \cdot \rho_{fl} \cdot g$$

entgegenwirken muss. Durch Gleichsetzen dieser Kräfte erhält man die Steighöhe h in der Kapillare:

$$h = \frac{2\gamma_{2,3} \cos(\varphi)}{\rho_{fl} \cdot g \cdot r} \quad (10)$$

Gleichung 10 wurde hier nur für benetzende Flüssigkeiten hergeleitet. Sie ist jedoch auch für vollständig benetzende und nicht benetzende Flüssigkeiten anwendbar. Im Fall von nicht benetzenden Flüssigkeiten liegt der Flüssigkeitsspiegel in der Kapillare unterhalb des Flüssigkeitsspiegels des Beckens. Dieses Verhalten wird als Kapillardepression bezeichnet.

Literatur

Demtröder, Experimentalphysik 1 Mechanik und Wärme, 4. Auflage, Springer Verlag
Professor Dr. Andreas Meyer, Skript zur Vorlesung Experimentalphysik I, Version vom
14. Oktober 2005