# 1 Lösungen zu den Übungsaufgaben

## 1.1 Pfeil - Apfel

Pfeil:

$$\begin{aligned} t \cdot \cos\theta \cdot v_p &= L && (1) \\ \Rightarrow t_0 &= \frac{L}{\cos\theta \cdot v_p} && (2) \\ y_p(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + \sin\theta v_p t && (3) \end{aligned}$$

Apfel:

$$y_a(t) = -v_a t - \frac{1}{2}gt^2 + \sin\theta v_p t \quad (4)$$

$$(5)$$

Es muss gelten:

$$\begin{aligned} y_p(t_0) &\stackrel{!}{=} y_a(t_0) && (6) \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2}gt_0^2 + \sin\theta v_p t_0 = -v_a t_0 - \frac{1}{2}gt_0 + h_a && (7) \\ &\Rightarrow v_p \sin\theta \frac{L}{\cos\theta v_p} = -v_a \frac{L}{\cos\theta v_p} + \tan\alpha L && (8) \\ &\Rightarrow \tan\alpha = \tan\theta + \frac{v_a}{v_p \cos\theta} && (9) \end{aligned}$$

Fall $v_a = 0$:

$$\tan\alpha = \tan\theta \quad (10)$$

Unabhänging von der Entfernung.

## 1.2 Kreisbewegung, Odometrie

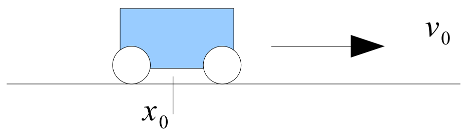
Kreisbewegung:

$$v = r \cdot \omega = r2\pi f \quad (11)$$

Geschw. der Innenseite: $v_1 = \pi \cdot d \cdot f_1$
Geschw. der Außenseite: $v_2 = \pi \cdot d \cdot f_2$
Für die Kreisbewegung gilt $\omega = const$

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{v_1}{R} \stackrel{!}{=} \frac{v_2}{R+a} \Rightarrow (R+a)v_1 = Rv_2 && (12) \\ \Rightarrow R &= \frac{-av_1}{v_1 - v_2} = \frac{af_1}{f_2 - f_1} = \frac{5}{2}\text{m} = 2,5\text{m} && (13) \end{aligned}$$

## 1.3 Zug




Zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $x_0$ beginnt es zu schneien. Außerdem gilt: $\lambda = \frac{dm}{dt} = const$
*Gesucht ist*: $x(t)$ nach der Zeit $t$
Bei $t = 0$ hat der Wagen die Masse $m_0$. Anschließend gilt: $m(t) = m_0 + \lambda t$.
Der Schneefall ist senkrecht zur Bewegungsrichtung des Wagens, d.h. in Bewegungsrichtung erzeugt dieser keine Beschleunigung. Deshalb ist der Impuls $p_0$ erhalten.

$$p_0 = const. = m(t)v(t) = m_0 v_0 \quad \Rightarrow$$
$$v(t) = \frac{p_0}{m(t)} = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \lambda t} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{m_0} t} v_0$$

$x(t)$ erhält man durch Integration:

$$x(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau = v_0 \int_0^t \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{m_0}\tau} d\tau$$
$$= \frac{v_0 m_0}{\lambda} \left[ ln \left( 1 + \frac{\lambda}{m_0} \tau \right) \right]_0^t = \frac{v_0 m_0}{\lambda} ln \left( 1 + \frac{\lambda}{m_0} t \right)$$

## 1.4 Zusammenprall zweier Autos

a) Es handelt sich hierbei um einen vollkommen inelastischen Stoß. Dh. der Gesamtimpuls ist erhalten.

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} v_P m_P \\ v_L m_L \end{pmatrix} \tag{14}$$

Die Bewegungsenergie ist nicht erhalten, da bei dem Zusammenstoß Bewegungsenergie in Wärme und Verformung umgewandelt wird.

b) $\alpha$ ist der Winkel zwischen x Achse und der Bewegungsrichtung der verkeilten Autos.

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{e}_x \boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} \Rightarrow \alpha = 78.6\text{deg} \tag{15}$$

c)

$$Q = E_{nachher} - E_{vorher} = \frac{1}{2}(m_P + m_L)v'^2 - \frac{1}{2}(m_p v_p^2 + m_L v_L^2) \tag{16}$$

d)

Je länger die Knautschzone, desto kleiner wird dir mittlere Kraft beim Zusammenprall ($W = FL$, wobei $L$ die Länger der Knautschzone ist). Damit wird die Beschleunigung reduziert, die auf einen Fahrgast wirkt.

### 1.5 Gravitationskraft

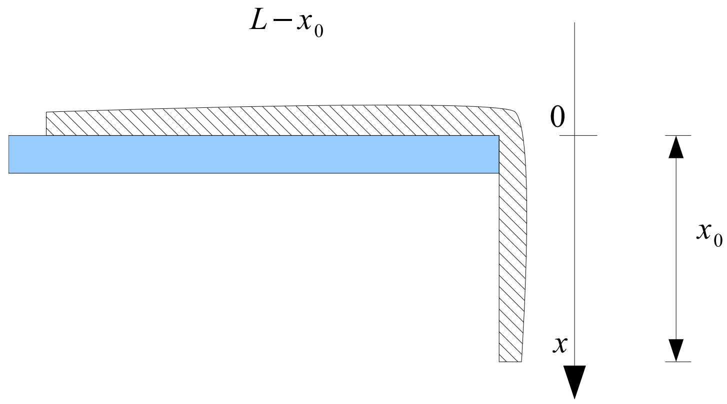
$$\begin{aligned}
R < r: \quad \boldsymbol{F}(r) &= -G\frac{mM}{r^2}\boldsymbol{e}_r && (17)\\
R > r: \quad M(r) &= M\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = M\frac{r^3}{R^3} && (18)\\
\Rightarrow \quad \boldsymbol{F}(r) &= -G\frac{mM}{R^3} r\boldsymbol{e}_r && (19)
\end{aligned}$$

### 1.6 Rutschendes Seil mit Reibung

a) Im Gleichgewicht gilt: Haftreibungskraft des ruhenden Seils = Gewichtskraft des hängenden Seils.

$$\begin{aligned}
\frac{L - x_0}{L} mg\mu_H &= \frac{x_0}{L} mg && (20)\\
x_0 &= \frac{L\mu_H}{1+\mu_H} && (21)
\end{aligned}$$

b) Der Kräfteansatz lautet:




$\mu_G = \mu$

$$F = m\ddot{x} = \frac{x}{L}mg - \frac{L-x}{L}mg\mu \tag{22}$$

$$\ddot{x} = x\underbrace{\left(\frac{g}{L}(1+\mu)\right)}_{\omega_0^2} - g\mu \tag{23}$$

$$\tag{24}$$

Die homogene DGL lautet $\ddot{x} = x\left(\frac{mg}{L}(1+\mu)\right)$. Wir setzen den Ansatz $x_h = Ae^{\beta t}$ in diese DGL ein. Dies liefert $\beta^2 = \omega_0^2$. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet damit ($\beta := |\omega_0|$)

$$x_h = Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t} \tag{25}$$

Eine spezielle Lösung ist einfach zu finden. Sie muss für die zweite Ableitung verschwinden:

$$x_p = \frac{g\mu}{\omega_0^2} \tag{26}$$

$$x = x_h + x_p = Ae^{\beta t} + Ae^{-\beta t} + \frac{g\mu}{\omega_0^2} \tag{27}$$

Aus den Randbedingungen folgen die Koeffizienten:

$$x(t=0) = L - x_0 = A + B + \frac{g\mu}{\omega_0^2} \tag{28}$$

$$\dot{x}(0) = 0 = \beta(A-B) \Rightarrow A = B \tag{29}$$

$$2A = x_0 - \frac{g\mu}{\omega_0^2} \tag{30}$$

$$A = B = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{\mu L}{1+\mu}\right) \tag{31}$$

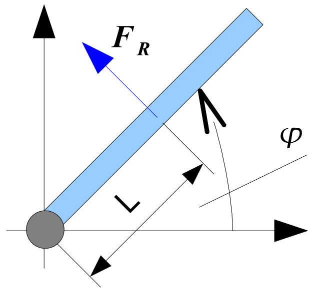
$$\tag{32}$$

c)

$$x(t) = L = \left(x_0 - \frac{\mu L}{1+\mu}\right)\cosh\beta t + \frac{\mu L}{1+\mu} \tag{33}$$

$$t_e = 1/\beta \operatorname{arcosh}\frac{L}{1+\mu(x - \frac{\mu L}{1+\mu})} \tag{34}$$

### 1.7 Schwingtür




a) Das auf die Tür wirkende Drehmoment setzt sich zusammen aus einem Anteil der Feder und einem Anteil des Dämpfers $lF = lr_o l\dot{\varphi}$:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi - L^2 r_0 \dot{\varphi} \tag{35}$$

b)

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{L^2 r_0}{J}}_{2\gamma} \dot{\varphi} + \underbrace{\frac{D}{J}}_{\omega_0^2} \varphi = 0 \tag{36}$$

Den Ansatz $Ae^{i\omega t}$ in die DGL einsetzen liefert:

$$\omega^2 - 2i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0 \tag{37}$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2} = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{38}$$

- Fall $\omega_0^2 > \gamma^2$

  Allgemeine Lösung durch einsetzen:

$$\varphi(t) = e^{-\gamma t}\left(Ae^{i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t} + Be^{-i\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t}\right) \tag{39}$$

  Oder als Reelle Lösung

$$\varphi(t) = e^{-\gamma t}\left(A\cos\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t + B\sin\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t\right) \tag{40}$$

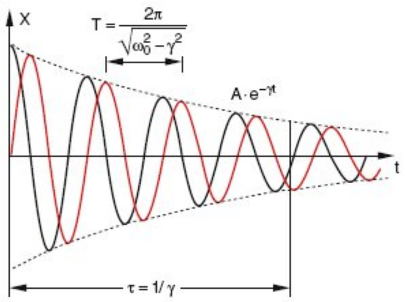



Abbildung 1: Exponentielle Dämpfung der Schwingung $\omega_0^2 > \gamma^2$

- Fall $\omega_0^2 < \gamma^2 \Rightarrow \omega 1, 2 = i\gamma \pm i\sqrt{-\omega_0^2 + \gamma^2}$

  Allgemeine Lösung

$$\varphi(t) = e^{-\gamma t}\left(Ae^{-\sqrt{-\omega_0^2+\gamma^2}t} + Be^{+\sqrt{-\omega_0^2+\gamma^2}t}\right) \tag{41}$$

- Fall $\omega_0^2 = \gamma^2$ *Aperiodischer Grenzfall* $\Rightarrow \omega = i\gamma$

  Allgemeine Lösung

$$\varphi(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t} \tag{42}$$

c) Für den Aperiodischen Grenzfall muss gelten: $\gamma^2 = \omega_0^2$

$$\gamma = \sqrt{\frac{D}{J}} = 2\text{s}^{-1} \tag{43}$$

d) $r_0 \mapsto r_1 = 0.8r_0 \Rightarrow \gamma_1 = 0.8\gamma = 0.8\omega_0 = 0.8\sqrt{D/J}$; Damit erhält man eine exponentiell gedämpfte Schwingung um die Ruhelage mit der Kreisfrequenz $\omega'$:

$$\varphi(t) = e^{-\gamma_1 t}\left(A\cos\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma_1^2}}_{\omega'}t + B\sin\sqrt{\omega_0^2 - \gamma_1^2}t\right) \tag{44}$$

Die Periodendauer ist demnach $T = 2\pi/\omega' = 5.2$ s. Damit lassen sich die Amplitudenverhältnisse berechnen:

$$\varphi_{n+1}/\varphi_n = \frac{e^{-\gamma_1(n+1)T}}{e^{-\gamma_1 nT}} = e^{-\gamma_1 T} = 2,3 \cdot 10^{-4} \tag{45}$$

### 1.8 Trägheitsmomente und Erhaltungsgrößen

**a)** *gesucht:* Trägheitsmoment $\Theta_S$ von Stab bzgl. senkrechter Achse.
da $B, D << L$ ist die einzig sinnvolle Anordnung:

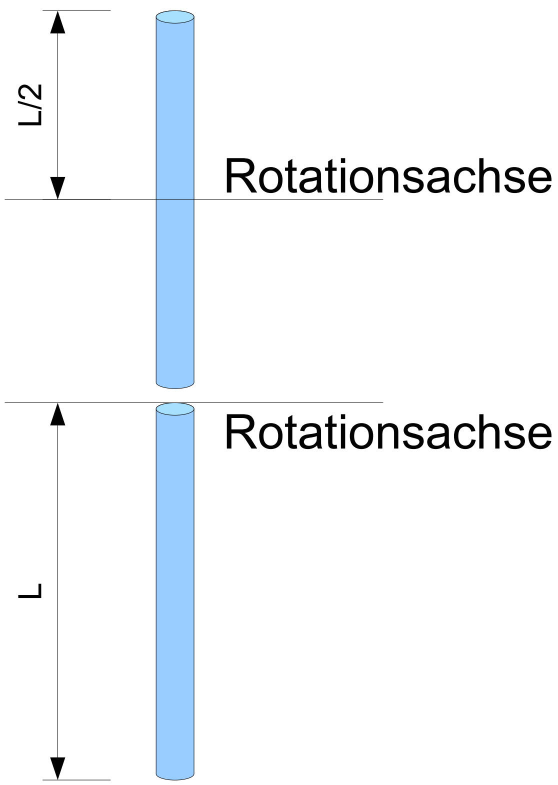



Abbildung 2: Drehung des Stabs um zwei verschiedene Drehachsen

**(i)**

$$\Theta_S = \int_V \rho(x^2 + y^2) d^3r = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx =$$
$$\frac{2M}{L} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{L/2} = \frac{ML^2}{12}$$

**(ii)** Nach dem Satz von Steiner gilt:

$$\Theta_A = \Theta_S + M \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

**b)** *gesucht:* Bei dreh- und verschiebbarer Aufhängung anfängliche Winkelgeschwindigkeit des Stabs und horizontale Geschwindigkeit der Aufhängung.

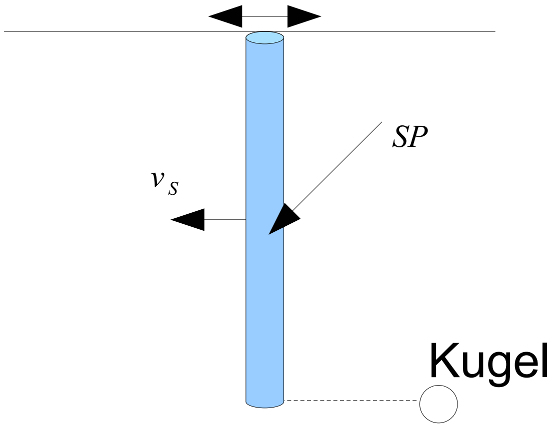



Abbildung 3: frei aufgehängter Stab mit Kugel

*Bezeichnungen:*
$v_S$: Geschwindigkeit des SP
$v_A$: Geschwindigkeit der Aufhängung
$\omega_S$: Winkelgeschwindigkeit um SP
$v$: Geschwindigkeit der Kugel

Das Lager ist horizontal frei beweglich: Impulserhaltung

$$mv = Mv_s \qquad v_s = \frac{m}{M}v$$

Drehimpulserhaltung in Bezug auf SP

$$mv\frac{L}{2} = \Theta_S\omega_S$$

Mit $\Theta_S$ aus a)
dann

$$v = \frac{2\Theta_S\omega_S}{mL} = \frac{ML\omega_S}{6m} \quad und \quad v_S = \frac{m}{M}v = \frac{L\omega}{6}$$

Energierhaltung:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Mv_S^2 + \frac{1}{2}\Theta_S\omega_S^2$$

Kinetische Energie Kugel = kinetische Energie SP + Rotationsenergie.
$v_S$ und $v$ von oben einsetzen führt zu

$$m\left(\frac{ML\omega_S}{6m}\right)^2 = M\left(\frac{L\omega_S}{6}\right)^2 + \frac{ML^2}{12}\omega_S^2$$

ist für $\frac{M}{m} = 4$ erfüllt- dann fällt Kugel senkrecht herunter.
Nun ist die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_S = \frac{6m}{ML}v = \frac{6}{L}\frac{1}{4}v = \frac{3}{2}\frac{v}{L} \quad und \quad v_S = \frac{1}{4}v$$

Bewegung der Aufhängung: Schwerpunktsbewegung minus Rotation

$$v_A = v_S - \frac{L}{2}\omega_S = \frac{v}{4} - \frac{L}{2}\frac{3}{2}\frac{v}{L} = -\frac{1}{2}v$$

Lager bewegt sich mit $\frac{1}{2}v$ *rčkwärts* zur Flugrichtung der Kugel.

## 1.9 Gekoppelte Schwingung

*gesucht:* Schwingungsfrequenz von zwei Massen, die mit Feder verbunden sind.

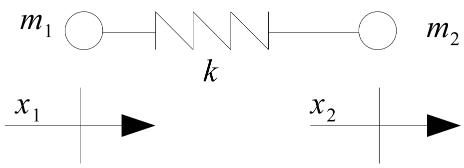



Abbildung 4: zwei mit Feder verbundene Massen

$$m_1\ddot{x}_1 = -kx_1 + kx_2$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -kx_2 + kx_1$$

daraus folgt:

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\frac{k}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_1}x_2 + \frac{k}{m_2}x_2 - \frac{k}{m_2}x_1$$
$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(x_1 - x_2)$$

Ersetze $x_1 - x_2 = q$ und $\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \ddot{q}$
damit gilt: $\ddot{q} = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)q$
daraus folgt

$$\omega = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} \;\; bzw. \;\; \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}$$

Beispiel aus der Natur: zweiatomiges Molekül