

# 1 Übungsaufgaben Mechanik

## 1.1 Pfeil - Apfel

Man zieht mit einem Pfeil auf einen senkrecht fallend Apfel.

Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen den Abschussparametern des Pfeiles ( $|\mathbf{v}|$ ,  $\theta$ ) und den Parametern des Apfels  $|\mathbf{v}_a|$ ,  $h_a$ ,  $L$  her.

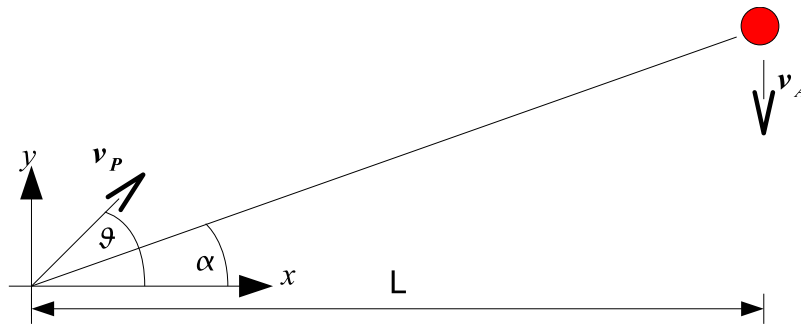


Abbildung 1: Pfeil - Apfel

## 1.2 Kreisbewegung, Odometrie

Ein Fahrzeug mit 2 Rädern an einer Achse (Abstand  $a = 50\text{cm}$ ) kann die Radbewegung getrennt ansteuern. Berechnen Sie die Bewegung, die das Fahrzeug zurück legt, wenn die Räder einen Durchmesser von  $d = 10\text{cm}$  haben und sich das rechte Rad mit einer Frequenz von  $f_1 = 1\text{Hz}$  und das linke mit  $f_2 = 1,2\text{Hz}$  dreht.

## 1.3 Zug

Ein Eisenbahnwagen der Masse  $m_0$  rollt reibungsfrei und antriebslos auf einem horizontalen Schienenstrang mit der Geschwindigkeit  $v_0$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  beginnt es mit konstanter Massenrate  $\dot{\rho} = dm/dt$  zu schneien (senkrecht zur Bewegungsrichtung des Zugs; kein Impulsübertrag). Wie weit ist der Wagen nach der Zeit  $t$  gerollt?

## 1.4 Zusammenprall zweier Autos

An einer Kreuzung kommt es zum Zusammenstoß zweier Kraftwagen. Der  $m_P = 1,2\text{t}$  schwere Personenwagen fährt mit  $v_P = 52\text{km/h}$  in x-Richtung in die Kreuzung ein, wohingegen der beteiligte  $m_L = 5\text{t}$  LKW mit  $v_L = 62\text{km/h}$  in y-Richtung unterwegs war. Die Karosserien der Wagen verkeilen sich dabei ineinander.

- a) Welche Erhaltungssätze müssen bei diesem Vorgang berücksichtigt werden?
- b) Mit welcher Geschwindigkeit und in welche Richtung werden sich die verkeilten Wagen bewegen?
- c) Ist der Energie-Erhaltungssatz erfüllt? Berechnen Sie die Differenz der Energien vor und nach dem Zusammenprall  $E_p$  und vergleichen Sie diese mit der Energie des PKW vor dem Zusammenprall!
- d) Offensichtlich ist die überschüssige Energie von der Wagenform unabhängig. Was bringt dann eine Knautschzone am Auto?

## 1.5 Gravitationskraft

Berechnen Sie die Gravitationskraft, die auf eine Masse  $m$  wirkt, in abhängigkeit von ihrem Abstand  $r$  zu einem Planeten der Masse  $M$ , Radius  $R$  (auch innerhalb). Tragen Sie die Gravitationskraft gegen  $r$  auf. Nehmen Sie an, die Masse des Planeten sei homogen verteilt.

## 1.6 Rutschendes Seil mit Reibung

Ein Seil mit der Masse  $m$  und der Länge  $L$  wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  in einer Lage losgelassen, in der ein Seilende bereits  $x(t = 0) = x_0$  weit vom Tisch herunterhängt.  $\mu_H$  und  $\mu$  seien Haft- und Gleitreibungskoeffizient zwischen Tisch und Seil. ( $\mu < \mu_H$ )

- a) Bestimmen Sie die Länge  $x_0$ , bei der das Seil gerade noch haftet.
- b) Das Seil wird nun durch eine infinitesimale kleine Störung ins Gleiten gebracht, sodass es über die Tischkante hinuntergleitet. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und lösen Sie diese, indem Sie mit dem Ansatz  $x_h(t) = A \exp \beta t$  eine allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und  $x_p(t) = C = const$  eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung finden. Bestimmen Sie die Konstanten in der Gesamtlösung  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$  so, dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind.
- c) Berechnen Sie einen Ausdruck für die Zeit  $t_e$ , nach der das gesamte Seil vom Tisch gerutscht ist.

## 1.7 Schwingtür

An einer Schwingtür, die in Bezug auf ihre Drehachse das Trägheitsmoment  $J = 15,0 \text{ kg m}^2$  besitzt und von einer Feder mit dem Richtmoment  $D = 60 \text{ Nm}$  zur Ruhelage zurückgezogen wird, ist ein Öldämpfer mit einer Reibungskonstante  $r_0$  angebracht, der im Abstand  $L$  von der Türachse mit einer tangentialen Kraft  $F_R = r_0 v$  angreift.

- a) Wie lautet die Bewegungsgleichung für dieses System?
- b) Diskutieren Sie allgemein die Lösung der Differentialgleichung für die verschiedenen Fälle.
- c) Wie groß muss die Abklingkonstante  $\gamma$  der Tür sein, damit sie sich nach dem öffnen so schnell wie möglich von selbst schließt, ohne sich über die Ruhelage hinauszubewegen? Wie nennt man diese Lösung der Bewegungsgleichung?
- d) Durch Ölverlust verringert sich die Reibungskonstante  $r_0$  des Öldämpfers auf  $r_1 = 0.8r_0$ . Mit welcher Periodendauer  $T$  und welchem Amplitudenverhältnis  $n + 1/n$  pendelt nun die Tür?

## 1.8 Trägheitsmoment und Erhaltungsgrößen

(a) Berechnen Sie explizit das Trägheitsmoment eines homogenen Stabs der Länge  $L$  und Masse  $M$  mit vernachlässigbarer Breite und Dicke in Bezug auf eine Achse die senkrecht zum Stab steht für zwei Situationen: (i) die Achse gehe durch die Mitte des Stabs, (ii) die Achse sei an einem Ende des Stabs.

(b) Das obere Ende eines homogenen Stabs der Länge  $L$  und Masse  $M$  mit vernachlässigbarer Breite und Dicke ist drehbar an einem sich in horizontaler Richtung frei beweglichen masselosen Lager befestigt. Eine horizontal mit der Geschwindigkeit  $v$  anfliegende Kugel der Masse  $m$  trifft das untere Ende des Stabs. Bei welchem Verhältnis  $m/M$  wird die Kugel gerade vollständig abgebremst und fällt senkrecht nach unten zu Boden? Berechnen Sie für diesen Fall die anfängliche Winkelgeschwindigkeit des Stabs und die anfängliche horizontale Geschwindigkeit des Aufhängepunktes nachdem die Kugel den Stab getroffen hat (in Abhängigkeit von  $L$  und  $v$ ).

## 1.9 Gekoppelte Schwingung

Zwei Teilchen der Masse  $m_1$  und  $m_2$  sind durch eine Feder mit Federkonstante  $k$  verbunden. Nehmen Sie an, dass keine äußeren Kräfte auf das Teilchen-Feder System wirken. Geben Sie ein Beispiel für ein solches Systeme in der Natur an. Zeigen Sie, dass die Frequenz  $\nu$  der Schwingungen des Systems gegeben ist als

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}$$