TU München | Experimentalphysik 1 | DVP Vorbereitungskurs

Andreas Brenneis; Rebecca Saive; Felicitas Thorne

Mechanik

28./29.07.2008

Inhaltsverzeichnis

1 Kinematik

Die Kinematik beschreibt die Bewegung von Massenpunkten im Raum.

1.1 Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung

- Der Ortsvektor gibt die Position eines Teilchens bezüglich eines zuvor festgelegten Koordinatenursprunges an.

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e_x} + y\boldsymbol{e_y} + z\boldsymbol{e_z} \tag{1}$$

  Der Ortsvektor ist im Allgemeinen zeitabhängig: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$

- Die zeitliche Änderung des Ortes ist die Geschwindigkeit.

$$\frac{x_i(t+\Delta t) - x(_i t)}{\Delta t} \overset{lim \Delta t \to 0}{\rightarrow} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \dot{x}_i = v_i \tag{2}$$

  Oder vektoriell: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}(t)$

- Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit ist die Beschleunigung:

$$\frac{v_i(t+\Delta t) - v_i(t)}{\Delta t} \overset{lim \Delta t \to 0}{\rightarrow} \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_i = a_i \tag{3}$$

Für die Bewegungen entlang der drei Raumrichtungen gilt das *Superpositionsprinzip*. Dies besagt, dass die Bewegungen entlang der Raumachsen als getrennt betrachtet werden können und sich gegenseitig nicht beeinflussen (zum Beispiel der schiefe Wurf). Das Superpositionsprinzip gilt für den Ort, für die Geschwindigkeit und für die Beschleunigung.

1.2 Kreisbewegungen

Hier empfiehlt sich die Anpassung des Koordinatensystems an das Problem.

- **Kugelkoordinaten**

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{4}$$

  - $\boldsymbol{e}_r$
  - $\boldsymbol{e}_\varphi = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}\varphi} \frac{1}{\sin\vartheta}$

– $\boldsymbol{e}_\vartheta = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}\vartheta}$

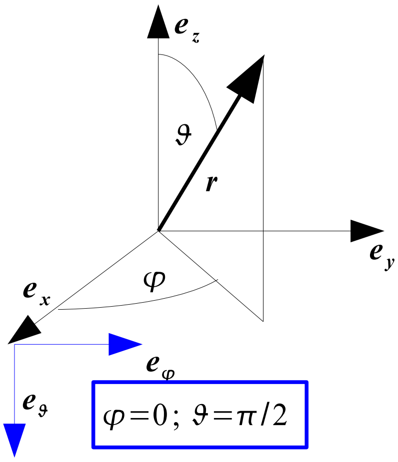


Abbildung 1: Kugelkoordinaten; Richtung der Einheitsvektoren für die gegebenen speziellen Winkeln

- **Polarkoordinaten**: Mit $\vartheta = \pi/2$ erhält man aus Gleichung 4

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \tag{5}$$

Für die Kreisbewegung gelte $r(t) = \text{konst}$. Damit folgt für die Geschwindigkeit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r} = r \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)\dot{\varphi} \\ \cos(\varphi)\dot{\varphi} \end{pmatrix} = r \cdot \dot{\varphi}\boldsymbol{e_\varphi} \tag{6}$$

Der Geschwindigkeitsvektor ist parallel zur Kreisbahn. Mit $\omega = \dot{\varphi}$ gilt:

$$|\boldsymbol{v}| = \omega \cdot r \tag{7}$$

$$\boldsymbol{v} = \omega \times \boldsymbol{r} \tag{8}$$

Weiterer wichtiger Zusammenhang: $r \cdot \varphi = s$, wobei s die Strecke auf der Kreisbahn ist.

Erneutes Ableiten von von Gleichung 6 führt zur Zentripetalbeschleunigung, die in den Kreismittelpunkt zeigt:

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = r\ddot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\boldsymbol{e}_r \tag{9}$$

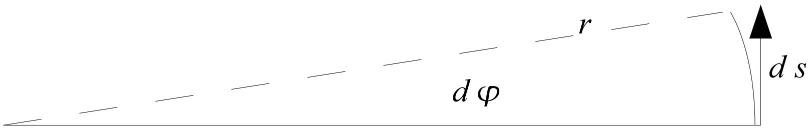


Abbildung 2: $\mathrm{d}s = r\mathrm{d}\varphi$

Bei allgemeinen, krummlinigen Bewegungen ist r eine Funktion der Zeit, diese muss beim Ableiten mit berücksichtigt werden.

2 Dynamik

Ursache für die Bewegung von (trägen) Massen sind Kräfte.

2.1 Newtonsche Axiome

1. Ein Körper, auf den keine Kraft wirkt, bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.

   Definition des *Impulses* $\boldsymbol{p}$
   $$\boldsymbol{p} = m \cdot \boldsymbol{v} \tag{10}$$

   Es gilt also $\boldsymbol{p} = \text{konst}$;

   Wirkt auf einen Massenpunkt keine Kraft, so ist sein Impuls erhalten (*Impulserhaltung*).

2. Eine auf einen Körper mit der Masse m wirkende Kraft $\boldsymbol{F}$ beschleunigt den Körper gemäß:
   $$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{11}$$

   Für $m = \text{konst}$ lässt sich dies auch schreiben als:
   $$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \tag{12}$$

3. actio = reactio

Für die Kräfte, die auf einen Körper wirken, gilt wieder das Superpositionsprinzip, d.h. vektorielle Addition der Teilkräfte zu einer effektiven Kraft (und umgekehrt). Kennt man nun alle auf einen Körper einwirkende Kräfte, so lässt sich die Bewegung des Körpers aus der Bewegungsgleichung ableiten:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}/m \tag{13}$$

3 Energie

3.1 Arbeit und Leistung

Die *Arbeit* W ist definiert als Kraft mal Weg.

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{14}$$

Hieraus folgt, dass nur der Anteil der Kraft, der *parallel zum Weg wirkt*, am Massenpunkt Arbeit verrichtet (Skalarprodukt ist Null).

Beispiel Kreisbewegung: Auf eine Kugel, die an einem Seil hängt und sich auf einer konstanten Kreisbahn befindet, wirkt die Zentripetalkraft. Jedoch steht die Zentripetalkraft immer senkrecht zur Bewegung → es wird keine Arbeit verrichtet.

Eine Kraft (Kraftfeld) heißt *konservativ*, wenn die Arbeit unabhängig vom Weg ist:

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}^2} \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \text{Unabhängig vom Verbindungsweg} \tag{15}$$

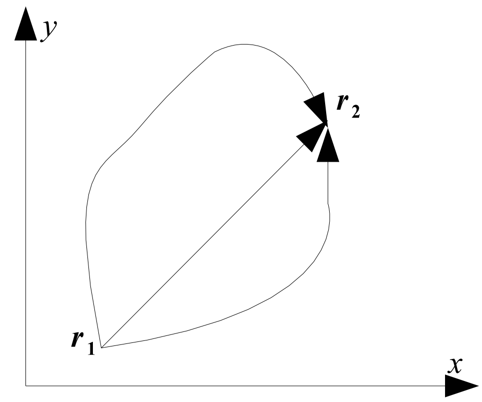


Abbildung 3: In einem konservativen Kraftfeld ist die geleistete Arbeit unabhängig vom Wegpfad

Konservative Kräfte besitzen immer ein *Potential* ϕ: $\boldsymbol{F} = -\nabla\phi$

Beispiele für konservative Kraftfelder:

- Gravitationsfeld
- Statisches elektrisches Feld

Zeitabhängige oder geschwindigkeitsabhängige Kraftfelder sind im Allgemeinen nicht konservativ.

Die Leistung ist definiert als Arbeit pro Zeit

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \tag{16}$$

Die Energie, die in der Bewegung eines Teilchens steckt, nennt man *kinetische Energie* E_{kin}. Für den nicht relativistischen Fall ist $E_{\text{kin}} = mv^2/2$.

Als *potentielle Energie* E_{pot} bezeichnet man im Zusammenhang mit konservativen Kräften die Energie, die ein Körper auf Grund seiner Lage in einem Kraftfeld hat . Diese kann beispielsweise in kinetische Energie umgewandelt werden. Die potentielle Energie wird immer bezüglich eines festen Bezugspunktes angegeben. Für Änderung der potentiellen Energie gilt:

$$\Delta E_{\text{pot}} = -W = -\int_{\boldsymbol{r_1}}^{\boldsymbol{r^2}} \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{17}$$

$$W = \int_{\boldsymbol{r_1}}^{\boldsymbol{r^2}} \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r_1}}^{\boldsymbol{r^2}} m\boldsymbol{a}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{t_1}}^{\boldsymbol{t^2}} m\dot{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}\mathrm{d}t = m\boldsymbol{v^2}(t_2)/2 - m\boldsymbol{v^2}(t_1)/2 \tag{18}$$

W	ΔE	
< 0	> 0	Der Körper leistet Arbeit, seine potentielle Energie nimmt in Folge zu.
> 0	< 0	Potentielle Energie wird in Bewegungsenergie umgewandelt.

Man sieht, dass potentielle in kinetische Energie umgewandelt werden kann (und umgekehrt). In einem konservativen Kraftfeld geht dabei keine Energie verloren.

Energieerhaltung: In einem abgeschlossenem System (keine äußere Kraft) ist die Gesamtenergie erhalten.

Speziell: In einem konservativen Kraftfeld ist die Summe aus potentieller und kinetischer Energie zeitlich konstant.

3.2 Reibung

In vielen Systemen vernachlässigt man die Reibung. Bei Bewegungen tritt sie in Form der *Gleitreibung* auf. Diese ist in erster Näherung proportional zur Gewichtskraft (Normalkomponente F_N, eigentlich der auf die Unterlage ausgeübte Druck) eines Körpers, der sich über eine Oberfläche bewegt. Die Reibung wirkt stets entgegengesetzt zur Bewegung und lässt sich über eine dimensionslose Materialkonstante μ spezifizieren: $F_R = \mu F_N$

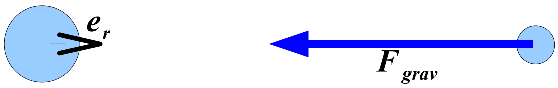
Die *Haftreibungskraft* ist größer als die Gleitreibungskraft und wirkt, wenn der Körper auf der Oberfläche ruht: $F_H = \mu_H F_N$. $\mu_H > \mu$;

3.3 Spezielle Energieformen

- Gravitationsenergie

  Experimentell findet man für die attraktive Wechselwirkung zweier schwerer Massen

$$\text{Kraft auf} m_1 = F_{grav} = -G\frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2}\boldsymbol{e}_r = -G\frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \tag{19}$$



  Das zugehörige Potential ist $\phi = -G\frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}$ und erfüllt die Eigenschaft einer konservativen Kraft: $-\nabla\phi = F$

  Entwickelt man dies Potential für die Situation an der Erdoberfläche so erhält man $E_{pot} = mgh$

- Federkraft

  Für eine ideale Feder gilt für Dehnungen im elastischen Bereich für die Federkraft

$$F = -k(x - x_0) \tag{20}$$

  Die Federkraft wirkt gegen die Auslenkung aus der Ruhelage x_0. Das Potential ist folglich $E_{pot} = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$

- Homogenes E Feld

  Für ein homogenes elektrisches Feld $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_x$ ist die Kraft die eine Probeladung q spürt $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$. Daraus folgt für das Potential $E_{pot} = -qxE$.

4 Drehimpuls

Das Vektorprodukt

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{21}$$

nennt man *Drehimpuls*.

Analog zum Impuls ist der Drehimpuls in einem abgeschlossenen System auch eine Erhaltungsgröße.

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses bezeichnet man als *Drehmoment* $\boldsymbol{M}$:

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{p}}_{=0} + \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{22}$$

Mit $\dot{\boldsymbol{p}} = m\boldsymbol{a}$ kann man $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\perp + \boldsymbol{a}_{||}$ in eine Komponente senkrecht und eine parallel zur $\boldsymbol{r}$ zerlegen (analog für $\boldsymbol{F}$). Damit lässt sich Gleichung 22 auch skalar schreiben als $M = r \cdot F_\perp$.

Man beachte: Drehimpuls und Drehmoment sind immer bezüglich eines festen Punktes definiert.

4.1 Himmelsmechanik

Die zugrunde liegende Wechselwirkung ist die *Gravitationskraft*.

$$\boldsymbol{F}_G = -G\frac{m \cdot M}{R^3} \cdot \boldsymbol{R} \tag{23}$$

Die Gravitationsenergie (Potentielleenergie) lässt sich gemäß $\boldsymbol{F}_G = -\nabla E_{\mathrm{pot}}$ schreiben als:

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{pot}} = -G\frac{M \cdot \mathrm{d}m}{R} \tag{24}$$

Für einen Planeten im Gravitationsfeld der Sonne gilt Energie- und Impulserhaltung. Daraus folgen die *Keplerschen Gesetze*:

1. Planeten bewegen sich auf Ellipsen. In einem der beiden Brennpunkt befindet sich die Sonne.

2. Der Fahrstrahl eines Planeten überstreicht in gleicher Zeit die gleiche Fläche.

3. Große Halbachse eines Planeten i: a_i

$$\frac{T_i^2}{a_i^3} = \text{konst} \tag{25}$$

Für die Bahnbewegung des Planeten erhält man

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon \cdot \cos\varphi} \tag{26}$$

Dabei ist der Koordinatenursprung der Mittelpunkt der Sonne und $a = -\frac{GmM}{2E}$ und $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2m^3M^2}}$; $E = E_pot + E_kin$ =konst ist die Gesamtenergie;

Man unterscheidet drei Fälle

E	Bahn
$E > 0$	Hyperbel
$E < 0$	Ellipse
$E = 0$	Parabel

Die Gravitationskraft außerhalb eines kugelförmig ausgedehnte Planeten ist die selbe, wie wenn die Masse im Mittelpunkt des Planeten vereinigt ist.

Im Inneren einer Kugelschale aus gravitativer Masse wirkt auf einen Körper keine Kraft.

4.2 Beschleunigte Koordinatensysteme

In beschleunigten Koordinatensystemen treten Scheinkräfte auf. Hier gehen wir von einem sich drehenden Koordinatensystem aus, wie es zum Beispiel bei der Erde der Fall ist. Ein *Inertialsystem* ist ein unbeschleunigtes Koordinaten- bzw. Bezugssystem.

K sei nun ein Innertialsystem und K' ein beschleunigtes Bezugssystem. Dabei dreht sich K' wie in Abbildung 4 gezeigt um K.

Die Geschwindigkeit die ein Beobacheter im Inertialsystem K sieht ist:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{27}$$

Analog würde der Beobachter im beschleunigten Bezugssystem K' vorgehen: $\boldsymbol{v}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}$. Dabei wird aber nicht beachtet, dass sich die Einheitsvektoren des Koordinatensystems ändern:

Korrekt ist:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + x'\dot{\boldsymbol{e}}'_x + y'\dot{\boldsymbol{e}}'_y + z'\dot{\boldsymbol{e}}'_z \tag{28}$$

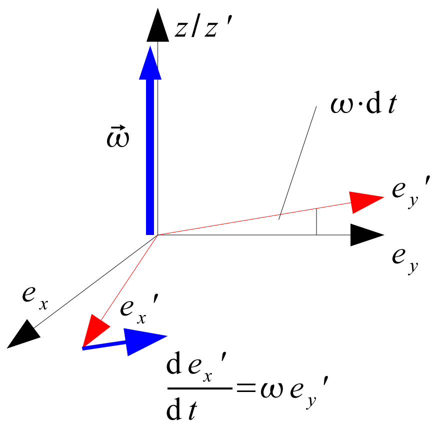


Abbildung 4: Zeitabhängige Einheitsvektoren im beschleunigten Bezugssystem

Vorsicht: Die gestrichenen Koordinaten geben die Koordinaten in K' an und die nicht gestrichenen in K. Dabei ist mit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$ der selbe Punkt gemeint, jedoch sind die Komponenten in den beiden Koordinatensystemen im Allgemeinen unterschiedlich! Man braucht also noch eine Trafo um die Vektoren zwischen den Koordnatensystemen zu transformieren:

$$\boldsymbol{r} =^{\text{Trafo}} \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{r}' \tag{29}$$

Die Ableitungen der Einheitsvektoren ergeben sich gemäß Abbildung 4 zu $\dot{\boldsymbol{e}}_x' = |\boldsymbol{e}_x|\omega\boldsymbol{e}_y'$ usw..

Allgemein kann man schreiben:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{30}$$

Beispiel: MP ruht in K, $\boldsymbol{v}(t) = 0$, $\boldsymbol{r}(t) = y\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{r}'(t=0) = x'\boldsymbol{e}_x'$;

Dann ist $\boldsymbol{v}' = -\omega \times \boldsymbol{r}' = -(0,0,\omega)^{\mathrm{T}} \times x'\boldsymbol{e}_x' = -\omega x'\boldsymbol{e}_y' = \omega x' e_y$

Dabei kann die letzte Umwandlung mit der oben gezeigten Trafo durchgeführt werden.

Für die Beschleunigung gilt nun:

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\omega \times \dot{\boldsymbol{r}}}_{\text{Gl.30}} = \boldsymbol{a}' + \omega \times \boldsymbol{v}' + \omega \times (\boldsymbol{v}' + \omega \times \boldsymbol{r}) \tag{31}$$

Daraus folgt:

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_{ZF} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{v}' \times \omega + \omega \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}) \tag{32}$$

Beispiel: $\boldsymbol{v}(t) = 0$, $\boldsymbol{r}'(t = 0) = x'e'_x$, $\boldsymbol{v}' = 0$; Dann ist $\boldsymbol{a}' = \omega \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}) = \omega^2 x' e'_x = \omega^2 (x' cos\omega t \boldsymbol{e}_x + x' sin\omega t \boldsymbol{e}_y)$. Man beachte wieder die Darstellung in den unterschiedlichen Koordinatensystemen K und K', die sich mit der Transformation umrechnen lassen.

5 Mehrteilchensysteme

5.1 Hebelgesetz

Das *Hebelgesetz* gibt die Gleichgewichtsbedingung eines zweiarmigen Hebels an. Die beiden Drehmomente heben sich dabei auf.

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = 0 \tag{33}$$

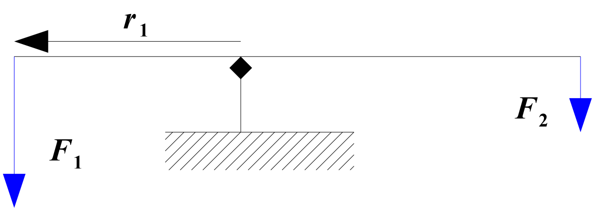


Abbildung 5: Hebelgesetz

5.2 Stoßprozesse

Bei Stoßvorgängen, bei denen keine äußeren Kräfte wirken, ist der Impuls erhalten. Damit lassen sich die beiden Spezialfälle herleiten. Beim vollkommen *elastischen Stoß* ist auch die kinetische Gesamtenergie erhalten.

Für den vollkommen *inelastischen Stoß* gilt, dass die Gesamtbewegungsenergie abnimmt und zum Beispiel in Wärme oder Verformung umgewandelt wird.

Definition des *Schwerpunktes* $\boldsymbol{R}(t)$:

$$\boldsymbol{R}(t) = \sum_i m_i \cdot \boldsymbol{r}_i / M \quad \text{,mit } M = \sum_i m_i \tag{34}$$

Die Impulserhaltung sagt, dass die Gesamtimpulse vor ($\boldsymbol{p}$) und nach ($\boldsymbol{p}'$) dem Stoß gleich sind.

$$\boldsymbol{p} = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i' = \boldsymbol{p}' \tag{35}$$

Für den Schwerpunkt gilt damit:

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{V} = \sum_i m_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} / M = \boldsymbol{p}/M = \text{zeitlich konst} \tag{36}$$

Der Schwerpunkt bewegt sich also gleichförmig, wenn keine äußere Kraft vorhanden ist. Ist eine äußere Kraft vorhanden, dann wird der Schwerpunkt durch sie beschleunigt.

Analog dazu ist der Gesamtdrehimpuls in einem abgeschlossenen System erhalten (Drehimpulserhaltung).

5.3 Starre Körper

Die Massenpunkte eines starren Körpers haben relativ zueinander immer den gleichen Abstand (vektoriell). Im Grenzfall von vielen Teilchen geht die Summenschreibweise in die Integralschreibweise über. Zum Beispiel Gesamtmasse $M = \sum_i m_i = \int \mathrm{d}V \rho(\boldsymbol{r})$), dabei ist $\rho = \mathrm{d}M/\mathrm{d}V$ die Dichte des starren Körpers.

Der Schwerpunkt lässt sich damit schreiben als: $\boldsymbol{R} = 1/M \int \rho\, \boldsymbol{r}\, \mathrm{d}V$

Für die Behandlung der Bewegung des starren Körpers führen wir Relativkoordinaten ein.

$$\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R} \tag{37}$$

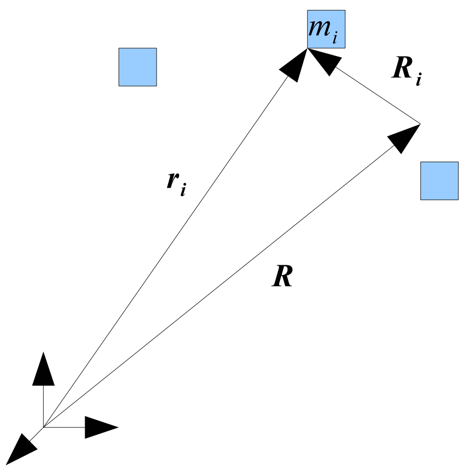


Abbildung 6: Relativkoordinaten

Für die Relativgeschwindigkeit ergibt sich mit $\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{V}$ durch Ableiten von $\boldsymbol{R}_i$

$$\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V} \tag{38}$$

Der Abstand zum Schwerpunkt ist konstant, damit gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{R}_i^2 = 2\boldsymbol{R}_i \cdot \boldsymbol{V}_i = 0$.

Die Relatitvgeschwindigkeit steht also senkrecht auf der Relativkoordniate. Damit lässt sich $\boldsymbol{V}_i$ mit geeignetem ω schreiben als $\boldsymbol{V}_i = \omega \times \boldsymbol{R}_i$

Damit setzt sich die Geschwindigkeit des MP m_i zusammen aus der Schwerpunktsbewegung und einer Rotation um den SP.

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{V} + \omega \times \boldsymbol{R}_i \tag{39}$$

Dies übertragen wir nun auf alle MP m_i, oder auch eine kontinuierliche Massenansammlung.

Die kinetische Energie des Teilchens m_i ergibt sich mit Gleichung 39 zu:

$$E_{kin} = \sum_i \frac{m_i}{2} \boldsymbol{v}_i^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\boldsymbol{V}^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_i)^2 + 2\,\underbrace{\boldsymbol{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_i)}_{0} \right) \tag{40}$$

Der letzte Summand in der Summe ist null, da im Schwerpunktssystem gilt $\sum_i m_i \boldsymbol{R}_i = 0$. Hiermit und mit der Vektoridentität $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ lässt sich dies zeigen:

$$\sum_i m_i \boldsymbol{V}(\omega \times R_i) = (\boldsymbol{V} \times \omega) \underbrace{\sum_i m_i \boldsymbol{R}_i}_{0} \tag{41}$$

Nocheinmal: Wir setzten voraus, dass wir im Scherpunktsystem rechnen! Die Bedingung wäre auch erfüllt, wenn der Schwerpunkt ruht $\boldsymbol{V} = 0$

Zur Interpretation definieren wir folgenden Vektor $\boldsymbol{R}_{i\perp}$. Dieser ist die Komponente von $\boldsymbol{R}_i$, die senkrecht auf ω steht.

$$\boldsymbol{R}_{i\perp} = \boldsymbol{R}_i - \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \cdot \boldsymbol{R}_i \right) \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \tag{42}$$

Und führen damit auch die Größe J ein, die man als das *Trägheitsmoment* eines starren Körpers bezeichnet.

$$J_i = m_i \boldsymbol{R}_{i\perp}^2 \tag{43}$$

Das Gesamtträgheitsmoment des starren Körpers ist $J = \sum_i J_i$.

Aus diesen Definitionen folgt:

$$\sum_i \frac{1}{2} J_i \boldsymbol{\omega}^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} \boldsymbol{R}_{i\perp}^2 \boldsymbol{\omega}^2 \overset{=}{\text{Gl.42}} \sum_i \frac{m_i}{2} \left[\boldsymbol{R}_i^2 - 2 \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \boldsymbol{R}_i \right) \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \boldsymbol{R}_i \right) + \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \boldsymbol{R}_i \right)^2 \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \right)^2 \right] \omega^2$$
$$= \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\left(\omega^2 \boldsymbol{R}_i^2 \right) - \left(\omega \boldsymbol{R}_i \right)^2 \right) = E_{rot} \tag{44}$$

Dies entspricht der Rotationsenergie der Massenpunkte m_i um den Schwerpunkt. Gleichung 40 lässt sich umwandeln:

$$\sum_i \frac{m_i}{2} (\omega \times \ R_i)^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\left(\omega^2 \boldsymbol{R}_i^2 \right) - \left(\omega \boldsymbol{R}_i \right)^2 \right) \tag{45}$$

Für die Umformung wurde die Vektoridentität $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 \boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{ab})^2$ verwendet.

Für eine kontinuierliche Massenverteilung gilt:

$$E_{rot} = \boldsymbol{\omega}^2 / 2 \sum_i m_i \boldsymbol{r}_{i,\perp}^2 = \boldsymbol{\omega}^2 / 2 \int \rho \boldsymbol{r}_{i,\perp}^2 \mathrm{d}V = \boldsymbol{\omega}^2 J / 2 \tag{46}$$

Damit lässt sich die Energie in Gleichung 40 zerlegen in die Translationsenergie des Schwerpunktes und die Rotationsenergie des starren Körpers:

$$E_{ges} = E_{trans} + E_{rot} = \frac{M}{2} \boldsymbol{V}^2 + \frac{J}{2} \boldsymbol{\omega}^2 \tag{47}$$

Untersuchen wir nun den Drehimpuls des starren Körpers. Wir machen noch die Annahme, dass die Bewegung in einer Ebenen abläuft ($\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{R}_{i,\perp}$). Bezüglich der Rotationsachse ist der Drehimpuls des MP m_i

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{R}_{i,\perp} \times (m_i \boldsymbol{V}_i) = m_i \boldsymbol{R}_{i,\perp} \times (\omega \times \boldsymbol{R}_{i,\perp}) \overset{|\boldsymbol{L}_i|}{\to} m_i \omega R_{i,\perp}^2 \tag{48}$$

Der Gesamtdrehimpuls ist

$$\boldsymbol{L} = \sum_i L_i = J \boldsymbol{\omega} \tag{49}$$

Bemerkung zum Trägheitsmoment J: Das Trägheitsmoment J ist auf eine bestimmte Achse bezogen. Für die Beschreibung der Kinematik eines starren Körpers ist dies die Rotationsachse.

Kennt man das Trägheitsmoment I_S bezüglich einer Achse A durch den Schwerpunkt, so lässt sich mit dem *Steinerschen Satz* das Trägheitsmoment I_B bezüglich einer Achse B, die parallel zur Achse A um den Abstand a verschoben ist, berechnen.

$$I_B = I_S + a^2 M \tag{50}$$

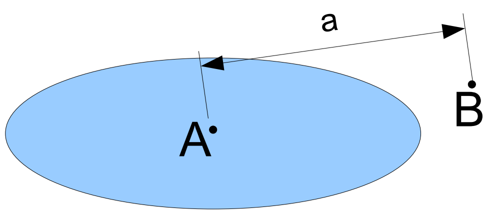


Abbildung 7: Steinerscher Satz

5.4 Bewegungsgleichung

Für den Drehimpuls gilt allgemein:

$$\boldsymbol{L} = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \tag{51}$$

Schauen wir uns noch einmal die zeitliche Ableitung des Drehimpulses $\boldsymbol{L}$ an:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L} = \sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i \times \ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}) = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^a + \underbrace{\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \sum_{j,j\neq i} \boldsymbol{F}_{ij}}_{0} \tag{52}$$

Dabei haben wir die auf den MP m_i wirkende Kraft zerlegt in eine äußere Kraft $\boldsymbol{F}_i^a$ und die Kraft die auf den MP von allen anderen Massenpunkten wirkt $\boldsymbol{F}_{ij}$. Für die letztere gilt dank Newton: $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$. Mit einem Indexshift in der Summe kann man zeigen, dass der letzte Summand verschwindet (die Wechselwirkung unter den MP heben sich auf).

Damit haben wir mit dem auf den starren Körper von außen wirkenden Drehmoment $\boldsymbol{M}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L} = \sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}) = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^a = \boldsymbol{M} \tag{53}$$

Daraus folgt die Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\boldsymbol{\omega}) = J\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{M} \tag{54}$$

Im einfachen Fall kann man (mit $\dot{\varphi} = \omega$) dies skalar schreiben als $M = J\ddot{\varphi}$.

Literatur

[1] Wolfgang Demtröder, Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme, 4. Auflage, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2006

[2] Torsten Fließbach, Lehrbuch zur Theoretischen Physik I - Mechanik, 5. Auflage, Elsevier Spektrum Akademischer Verlag, München, 2007