Technische Universität München

THOMAS REIFENBERGER
PROBEKLAUSUR
LÖSUNGEN

ANALYSIS II

Repetitorium Analysis II für Physiker

Aufgabe 1 *Multiple Choice* **5 Punkte**

Seien f ein Skalarfeld, A ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$, S^3 die Einheitskugel, $\gamma(t)$ eine Kurve mit $\gamma(0) = a,\ \gamma(1) = b$. Dann sind folgende Aussagen richtig:

	Richtig	Falsch
$\int_{\partial S^3} \mathrm{d}\sigma\ \mathrm{rot}\, A = 0$	☒	☐
$\mathrm{div}(f \cdot A) = \mathrm{grad}\, f\, \mathrm{div}\, A$	☐	☒
$\int_0^1 \mathrm{d}t\ f(\gamma(t)) = f(b) - f(a)$	☐	☒
$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = 0$	☒	☐
$\int_{S^3} \mathrm{d}^3 r\ \mathrm{div}\, A = \int_{\partial S^3} \mathrm{d}\sigma\ A$	☒	☐

Aufgabe 2 *Satz vom Maximum und Minimum* **5 Punkte**

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie, dass f auf X ein Maximum und ein Minimum hat.

Lösung: Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung ist kompakt. Also ist $f(X)$ kompakt und damit beschränkt. Daher hat $f(X)$ ein Supremum M und ein Infimum m. Da $f(X)$ kompakt ist, gilt $m \in f(X)$ und $M \in f(X)$. $\square$

Aufgabe 3 *Extrema im Mehrdimensionalen* **10 Punkte**

Gegeben sei auf dem positiven Oktanten $U = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0 \right\}$ die Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{1}{x_3}$$

a) Begründen Sie, dass f auf U beliebig oft differenzierbar ist und bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

b) Berechnen Sie die Hessematrix von f in den kritischen Punkten.

c) Wo liegen und von welche Art sind die Extrema von f?

Lösung:

a) f ist auf U eine rationale Funktion in x_1,x_2 und x_3 mit nullstellenfreien Nennern und damit stetig differenzierbar nach allen Variablen. Man sieht, dass sich durch beliebiges partielles Ableiten von f auf U wieder eine rationale Funktion mit nullstellenfreien Nennern ergibt, die damit stetig differenzierbar ist. Also ist f beliebig oft stetig partiell differenzierbar und damit beliebig oft stetig total differenzierbar.

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung lauten:

$$\partial_1 f = 1 - \frac{x_2}{x_1^2}\ , \quad \partial_2 f = \frac{1}{x_1} - \frac{x_3}{x_2^2}\ , \quad \partial_3 f = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3^2}$$

Für die kritischen Punkte muss daher gelten:

$$x_1^2 = x_2\ \wedge\ x_1 x_3 = x_2^2\ \wedge\ x_2 = x_3^2\ \wedge\ x_i > 0\ \forall i = 1, \ldots, 3\ \Rightarrow\ x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

b) Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung lauten:

$$\begin{aligned} \partial_{11} f &= 2\frac{x_2}{x_1^3}\ , \quad \partial_{22} f = 2\frac{x_3}{x_2^3}\ , \quad \partial_{33} f = 2\frac{1}{x_3^3} \\ \partial_{12} f &= -\frac{1}{x_1^2}\ , \quad \partial_{13} f = 0\ , \qquad \partial_{23} f = -\frac{1}{x_2^2} \end{aligned}$$

Aus dem Satz von Schwarz ergibt sich $\partial_{ij} f = \partial_{ji} f$ und somit die Symmetrie der Hessematrix. Im kritischen Punkt $(1,1,1)$ ist die Hessematrix gleich

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Im einzigen kritischen Punkt $(1,1,1)$ ist die Hessematrix positiv definit. Damit liegt ein Minimum vor. Da es die einzige Extremstelle von f ist, muss es sich um ein globales Minimum handeln.

Aufgabe 4 *Kurve in* $\mathbb{C}$ **8 Punkte**

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ ist zu festem $r > 0$ folgende Kurve zu betrachten:

$$\gamma(t) = 2r\,\mathrm{e}^{it} + r\,\mathrm{e}^{-2it}$$

a) Bestimmen Sie die singulären Stellen von γ sowie die kleinste Periode des Betrags der Ableitung $|\dot\gamma(t)|$.

b) Berechnen Sie die Länge von $\gamma(t)$ für $0 \le t \le 2\pi$. $|z| = 3r$.

Lösung:

a) γ singulär in $t_0 \Leftrightarrow \dot\gamma(t_0) = 0 \Leftrightarrow |\gamma(t_0)| = 0$

$$|\dot\gamma(t)| = |2ri\,\mathrm{e}^{it} - 2r\,\mathrm{e}^{-2it}| = |2ri\,\mathrm{e}^{it}(1 - \mathrm{e}^{-3it})| = 2r|1 - \mathrm{e}^{-3it}| =$$

$$= 2r\sqrt{(1-\mathrm{e}^{-3it})(1-\mathrm{e}^{3it})} = 2r\sqrt{1 - \mathrm{e}^{3it} - \mathrm{e}^{-3it} + 1} = 2r\sqrt{2 - 2\cos(3t)}$$

$$|\dot\gamma(t)| = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos(3t) = 1 \;\Leftrightarrow\; t = \frac{2\pi}{3}k\ ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Die Singulären Punkte liegen bei $t = \frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}$. Die Funktion unter der Wurzel ist $\frac{2\pi}{3}$-periodisch. Also ist $|\dot\gamma(t)|$ auch $\frac{2\pi}{3}$-periodisch. Das ist die kleinste Periode, denn es gilt $|\gamma(t)| = 0$ nur für $t = \frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}$

b)

$$L = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\ |\dot\gamma(t)| = 3\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \mathrm{d}t|\dot\gamma(t)| = 3\cdot 2r\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \mathrm{d}t\ \sqrt{2 - 2\cos(3t)} =$$

$$= 6r\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \mathrm{d}t\ \sqrt{2 - 2\left(\cos^2\frac{3t}{2} - \sin^2\frac{3t}{2}\right)} = 6r\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \mathrm{d}t\ \sqrt{4\sin^2\frac{3t}{2}} = 12r\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \mathrm{d}t\ \left|\sin\frac{3t}{2}\right| =$$

$$= 12r\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \mathrm{d}t\ \sin\frac{3t}{2} = 12r\left[-\frac{2}{3}\cos\frac{3t}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = 16r$$

Aufgabe 5 *Vektoranalysis* **6 Punkte**

Zeigen Sie folgende Identitäten aus der Vektoranalysis:

a) $\operatorname{grad} r^n = n \cdot r^{n-2} \cdot \vec r$ wobei $r = |\vec r|$

b) $\operatorname{div} \vec r = n$ für $\vec r \in \mathbb{R}^n$

c) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} A) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} A) - \Delta A$ mit $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Lösung:

a) Betrachte die i-te Komponente:

$$(\operatorname{grad} r^n)_i = \partial_i r^n = \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial r} r^n = \frac{\partial\sqrt{\sum_k x_k^2}}{\partial x_i} n r^{n-1} = \frac{2x_i}{2\sqrt{\sum_k x_k^2}} n r^{n-1} = \frac{x_i}{r} n r^{n-1} = x_i n r^{n-2}$$

b)

$$\operatorname{div} \vec{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

c) Betrachte die i-te Komponente

$$(\operatorname{rot}(\operatorname{rot} A))_i = \sum_{j,k} \partial_j (\operatorname{rot} \vec{A})_k \varepsilon_{ijk} = \sum_{j,k,l,m} \partial_j \partial_l A_m \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \sum_{j,k,l,m} \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m =$$

$$= \sum_{j,l,m} \partial_j \partial_l A_m (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) = \sum_j \underbrace{\partial_j \partial_i}_{=\partial_i\partial_j} A_j - \partial_j\partial_j A_i = \partial_i \operatorname{div} A - \Delta A_i$$

Alternativ: für die 1.te Komponente explizit ausrechnen, die weiteren ergeben sich durch zyklische Vertauschung.

Aufgabe 6 *Schwerpunkt* **6 Punkte**

Gegeben sei ein gerader Kreiskegel mit Radius R und Höhe h. Berechnen Sie seinen Schwerpunkt.

Lösung: Der Schwerpunkt des Kegels

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq R^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \ \wedge\ 0 \leq z \leq h\right\}$$

ist gegeben durch

$$S = \frac{1}{V_K} \int\limits_K \mathrm{d}^3 r \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

wobei V_K das Volumen des Kegels bezeichnet. Aus Symmetriegründen ist $S_x = S_y = 0$, wir müssen also nur die z-Komponente des Schwerpunkts berechnen. Wähle Zylinderkoordinaten:

$$S_z = \frac{1}{V_K} \int\limits_K \mathrm{d}^3 r\ z = \frac{1}{V_K} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^h \mathrm{d}z \int\limits_0^{R\left(1-\frac{z}{h}\right)} \mathrm{d}r\ rz = \frac{1}{V_K} 2\pi \int\limits_0^h \mathrm{d}z\ z \cdot \frac{1}{2} R^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{V_K}\pi R^2 \int\limits_0^h \mathrm{d}z\ z - 2\frac{z^2}{h} + \frac{z^3}{h^2} = \frac{1}{V_K}\pi R^2 \left[\frac{1}{2}z^2 - \frac{2}{3}\frac{z^3}{h} + \frac{1}{4}\frac{z^4}{h^2}\right]_0^h = \frac{1}{V_K}\pi R^2 h^2 \frac{1}{12}$$

Mit dem Kegelvolumen $V_K = \frac{1}{3}R^2 h\pi$ ergibt sich: $S_z = \frac{1}{4}h$.