Thomas Reifenberger
Probeklausur

Repetitorium Analysis II für Physiker

Aufgabe 1 *Multiple Choice* **5 Punkte**

Seien f ein Skalarfeld, A ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$, S^3 die Einheitskugel, $\gamma(t)$ eine Kurve mit $\gamma(0) = a,\ \gamma(1) = b$. Dann sind folgende Aussagen richtig:

	Richtig	Falsch
$\int\limits_{\partial S^3} \mathrm{d}\sigma\ \operatorname{rot} A = 0$	□	□
$\operatorname{div}(f \cdot A) = \operatorname{grad} f \operatorname{div} A$	□	□
$\int\limits_0^1 \mathrm{d}t\ f(\gamma(t)) = f(b) - f(a)$	□	□
$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$	□	□
$\int\limits_{S^3} \mathrm{d}^3 r\ \operatorname{div} A = \int\limits_{\partial S^3} \mathrm{d}\sigma\ A$	□	□

Aufgabe 2 *Satz vom Maximum und Minimum* **5 Punkte**

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie, dass f auf X ein Maximum und ein Minimum hat.

Aufgabe 3 *Extrema im Mehrdimensionalen* **10 Punkte**

Gegeben sei auf dem positiven Oktanten $U = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0 \right\}$ die Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{1}{x_3}$$

a) Begründen Sie, dass f auf U beliebig oft differenzierbar ist und bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

b) Berechnen Sie die Hessematrix von f in den kritischen Punkten.

c) Wo liegen und von welche Art sind die Extrema von f?

Aufgabe 4 *Kurve in $\mathbb{C}$* **8 Punkte**

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ ist zu festem $r > 0$ folgende Kurve zu betrachten:

$$\gamma(t) = 2r\,\mathrm{e}^{it} + r\,\mathrm{e}^{-2it}$$

a) Bestimmen Sie die singulären Stellen von γ sowie die kleinste Periode des Betrags der Ableitung $|\dot{\gamma}(t)|$.

b) Berechnen Sie die Länge von $\gamma(t)$ für $0 \leq t \leq 2\pi$. $|z| = 3r$.

Aufgabe 5 *Vektoranalysis* **6 Punkte**

Zeigen Sie folgende Identitäten aus der Vektoranalysis:

a) $\operatorname{grad} r^n = n \cdot r^{n-2} \cdot \vec{r}$ wobei $r = |\vec{r}|$

b) $\operatorname{div} \vec{r} = n$ für $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$

c) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} A) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} A) - \Delta A$ mit $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Aufgabe 6 *Schwerpunkt* **6 Punkte**

Gegeben sei ein gerader Kreiskegel mit Radius R und Höhe h. Berechnen Sie seinen Schwerpunkt.