Thomas Reifenberger

Aufgaben
Lösungen

Repetitorium Analysis II für Physiker

Aufgabe 1 *Gauß-Integral*

a) Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} = \pi$$

Nehmen Sie dabei ohne Beweis an, dass das Integral existiert.

Lösung: Wähle Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} = \int_0^\infty \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\ r\,\mathrm{e}^{-r^2} = 2\pi \int_0^\infty \mathrm{d}r\ r\,\mathrm{e}^{-r^2} = 2\pi\frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}u\ \mathrm{e}^{-u} = \pi\big[-\mathrm{e}^{-u}\big]_0^\infty = \pi$$

b) Es bezeichne $\|\square\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie die Formel

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n x\ \mathrm{e}^{-\|x\|^2} = \pi^{\frac{n}{2}}$$

Nehmen Sie dabei ohne Beweis an, dass das Integral existiert.

Lösung: Nach a) ist $\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ offensichtlich Riemann-integrierbar. Damit gilt der Satz von Fubini:

$$\pi = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-x^2}\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\ \mathrm{e}^{-y^2}\right) =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-x^2}\right)^2 \quad \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

Mit dem Satz von Fubini folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n x\ \mathrm{e}^{-\|x\|^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n x\ \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^n x_i^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-x^2}\right)^n = \pi^{\frac{n}{2}}$$

Aufgabe 2 *Implizite Funktionen*

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = \exp\left(\frac{xy}{z^2}\right) - z$$

a) Zeigen Sie, dass in einer Umgebung des Punktes $(1, 0, 1)$ eine Funktion $g(x, y)$ existiert, die die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ nach $z = g(x, y)$ auflöst.

b) Berechnen Sie den Gradienten von g an der Stelle $(1, 0)$.

Lösung: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ entspricht $f : A \times B \to C$ mit $(x, y) \in A = \mathbb{R}^2, z \in B = \mathbb{R}^+$, $C = \mathbb{R}$

a) Die Existenz einer solchen Funktion kann mit den Satz über implizite Funktionen gezeigt werden. Prüfe seine Vorraussetzungen:

(i) $f(1, 0, 1) = \mathrm{e}^0 - 1 = 0$

(ii) Da $z \neq 0$, ist f in $(1, 0, 1)$ eine Komposition stetig differenzierbarer Funktionen und damit stetig differenzierbar.

(iii) Das partielle Differential auf dem Bildraum B der gesuchten Funktion ist in $(1,0,1)$ invertierbar:

$$\mathrm{d}f_B(1,0,1) = (\partial_z f)\big|_{(1,0,1)} = -\frac{2xy}{z^3}\exp\left(\frac{xy}{z^2}\right) - 1\big|_{(1,0,1)} = -1$$

Damit ist der Satz anwendbar und die Existenz von g gezeigt.

b) Berechne zunächst das partielle Differential $\mathrm{d}f_A$ an der Stelle $(1,0,1)$

$$\mathrm{d}f_A(1,0,1) = (\partial_x f, \partial_y f)\big|_{(1,0,1)} = \left(\frac{y}{\exp}\left(\frac{xy}{z^2}\right), \frac{x}{\exp}\left(\frac{xy}{z^2}\right)\right)\Bigg|_{(1,0,1)} = (0,1)$$

Das Differential von g ist nach dem Satz über implizite Funktionen gegeben durch:

$$\mathrm{d}g(1,0) = -(\mathrm{d}f_B)^1 \cdot (\mathrm{d}f_A)\big|_{(1,0,1)} = -(-1)^{-1}\cdot(0,1) = (0,1) = (\operatorname{grad} g(1,0))^T$$

Aufgabe 3 *Skalarfeld*

Gegeben sei auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ die Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

a) Berechnen Sie den Gradienten von f.

b) Zeigen Sie, dass f harmonisch ist.
Zur Erinnerung: harmonische Funktionen erfüllen die *Laplace-Gleichung* $\Delta f = 0$.

c) Berechnen Sie das Oberflächenintegral von f auf der um $a > 0$ auf der z-Achse verschobenen Einheitskugel $K_a = \big\{(x,y,z) : x^2+y^2+(z-a)^2 = 1\big\}$.

$$I(a) = \int\limits_{K_a} \mathrm{d}\sigma f(x,y,z)$$

Legen Sie dazu den Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt $(0,0,a)$ und transformieren Sie die Funktion f entsprechend.

d) Skizzieren Sie $I(a)$.

Lösung:

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Aus Symmetriegründen ergibt sich:

$$\operatorname{grad} f = \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \frac{3x}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Aus Symmetriegründen ergibt sich:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f = 0$$

c) Der Ursprung des Koordinatensystems wird in den Punkt $(0,0,a)$ gelegt:
$(x,y,z) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} - a)$. Dadurch ist

$$f(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + (\tilde{z}-a)^2}}$$

$$I(a) = \int\limits_{K_a} \mathrm{d}\sigma\ f(x,y,z) = \int\limits_{S^2} \mathrm{d}\sigma\ f(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \int\limits_{S^2} \mathrm{d}\sigma\ \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + (\tilde{z}-a)^2}} =$$

Wähle nun Kugelkoordinaten auf der Einheitskugel: $\tilde{x} = \cos\varphi \sin\vartheta,\ \tilde{y} = \sin\varphi\sin\vartheta,\ \tilde{z} = \cos\vartheta$
$\mathrm{d}\sigma = \|\partial_\varphi \vec{r} \times \partial_\vartheta \vec{r}\| \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta = \sin\vartheta\ \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta\ \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{\sin^2\vartheta + (\cos\vartheta - a)^2}} = 2\pi \int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta\ \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{1 - 2a\cos\vartheta + a^2}} =$$

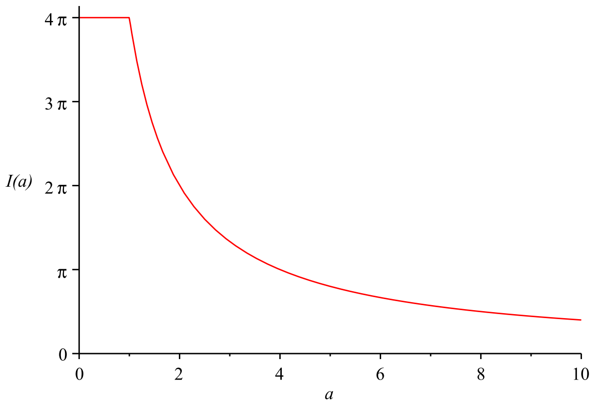
Substituiere nun $u = 1 - 2a\cos\vartheta + a^2$

$$= \frac{\pi}{a} \int\limits_{..}^{..} \mathrm{d}u\ \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{\pi}{a}\Big[2\sqrt{u}\Big]_{..}^{..} = \frac{\pi}{a}\Big[2\sqrt{1-2a\cos\vartheta + a^2}\Big]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2\pi}{a}\left(\sqrt{1+2a+a^2} - \sqrt{1-2a+a^2}\right) = \frac{2\pi}{a}\left(|a+1| - |a-1|\right) =$$

$$= \begin{cases} 4\pi & a < 1 \\ \frac{4\pi}{a} & a \geq 1 \end{cases}$$

d) Skizze



Aufgabe 4 *Stetigkeit*

Gegeben sei auf $\mathbb{R}^2$ die Funktion f mit $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0)$$

a) Sind die Beschränkungen von f auf achsenparallele Geraden stetig? Beweis?

b) Ist f stetig? Beweis?

Lösung:

a) Betrachte $x \mapsto f(x,c)$. Für $c = 0$ gilt $f(x, c = 0) = 0 \forall x$. Für $c \neq 0$ gilt:

$$f(x,c) = \frac{2xc}{x^2+c^2}$$

Der Nenner ist eine nullstellenfreie, stetige Funktion. Der Zähler ist ebenso stetig. Damit ist $f(x,c)$ stetig. Für die Beschränkungen auf die y-Achsenparallelen Geraden $y \mapsto f(d,y)$ folgt aus Symmetriegründen ebenfalls Stetigkeit.

b) f ist unstetig im Ursprung, da $f(t,t) - f(0,0) = 1$ für alle $t \neq 0$.

Aufgabe 5 *Vektorfeld*

Es sei auf dem $\mathbb{R}^3$ das Vektorfeld V gegeben durch

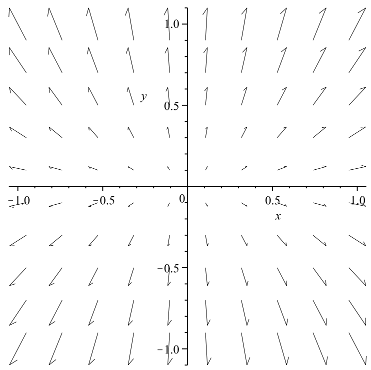
$$V(x,y,z) = \mathrm{e}^{-z^2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Skizzieren Sie das Vektorfeld in der x-y-Ebene.

b) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes durch die Oberfläche eines unendlich langen Zylinders um die z-Achse mit Radius R.

Lösung:

a) Skizze:



b) Benutze den Satz von Gauß:

$$\int\limits_{\partial Z} \mathrm{d}\vec{\sigma} V(x,y,z) = \int\limits_{Z} \mathrm{d}^3 r \,\mathrm{div}\, \mathrm{e}^{-z^2} \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} = \int\limits_{Z} \mathrm{d}^3 r 3\,\mathrm{e}^{-z^2} = \int\limits_0^R \mathrm{d}r \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z r 3\,\mathrm{e}^{-z^2} =$$

$$= 3 \cdot \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^R [\varphi]_0^{2\pi} \sqrt{\pi} = 3R^2 \pi^{\frac{3}{2}}$$