Repetitorium Analysis II für Physiker

Aufgabe 1 *Gauß-Integral*

a) Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} = \pi$$

Nehmen Sie dabei ohne Beweis an, dass das Integral existiert.

b) Es bezeichne $\|\square\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie die Formel

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n x\ \ \mathrm{e}^{-\|x\|^2} = \pi^{\frac{n}{2}}$$

Nehmen Sie dabei ohne Beweis an, dass das Integral existiert.

Aufgabe 2 *Implizite Funktionen*

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = \exp\left(\frac{xy}{z^2}\right) - z$$

a) Zeigen Sie, dass in einer Umgebung des Punktes $(1,0,1)$ eine Funktion $g(x,y)$ existiert, die die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ nach $z = g(x,y)$ auflöst.

b) Berechnen Sie den Gradienten von g an der Stelle $(1,0)$.

Aufgabe 3 *Skalarfeld*

Gegeben sei auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ die Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

a) Berechnen Sie den Gradienten von f.

b) Zeigen Sie, dass f harmonisch ist.
Zur Erinnerung: harmonische Funktionen erfüllen die *Laplace-Gleichung* $\Delta f = 0$.

c) Berechnen Sie das Oberflächenintegral von f auf der um $a > 0$ auf der z-Achse verschobenen Einheitskugel $K_a = \big\{(x,y,z) : x^2+y^2+(z-a)^2 = 1\big\}$.

$$I(a) = \int_{K_a} \mathrm{d}\sigma f(x,y,z)$$

Legen Sie dazu den Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt $(0,0,a)$ und transformieren Sie die Funktion f entsprechend.

d) Skizzieren Sie $I(a)$.

Aufgabe 4 *Stetigkeit*

Gegeben sei auf $\mathbb{R}^2$ die Funktion f mit $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0)$$

a) Sind die Beschränkungen von f auf achsenparallele Geraden stetig? Beweis?

b) Ist f stetig? Beweis?

Aufgabe 5 *Vektorfeld*

Es sei auf dem $\mathbb{R}^3$ das Vektorfeld V gegeben durch

$$V(x, y, z) = \mathrm{e}^{-z^2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Skizzieren Sie das Vektorfeld in der x-y-Ebene.

b) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes durch die Oberfläche eines unendlich langen Zylinders um die z-Achse mit Radius R.