Larissa Hammerstein

Vektoranalysis und Fourier-Transformation

Lösungen

Repetitorium Analysis II für Physiker

Aufgabe 1 *Skalarfelder*

Welche der folgenden Aussagen für die Niveaulinien der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = e^{3x+5y}$$

ist richtig?

□ Die Niveaulinien sind konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt $M(3,5)$.
□ Die Niveaulinien sind konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt $M(-3,-5)$.
□ Die Niveaulinien sind Parabeln mit dem Scheitelpunkt $S(3,5)$.
□ Die Niveaulinien sind Parabeln mit dem Scheitelpunkt $S(-3,-5)$.
□ Die Niveaulinien sind parallele Geraden mit der Steigung $-\frac{5}{3}$.
□ Die Niveaulinien sind parallele Geraden mit der Steigung $-\frac{3}{5}$.

Lösung: Berechnung der Niveaulinien:
$e^{3x+y} = c$
$\Leftrightarrow 3x + 5y = \ln c$
$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}\ln c$

Aufgabe 2 *Skalarfelder*

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^2y + 4xy$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

□ $\operatorname{grad} f(1,1) = 0$
□ $\operatorname{grad} f(-4,0) = 0$
□ $\operatorname{grad} f(0,-4) = 0$
□ $\operatorname{grad} f(0,0) = 0$
□ $\operatorname{grad} f(-2,0) = 0$
□ $\operatorname{grad} f(0,-2) = 0$

Lösung: $\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 2xy + 4y \\ x^2 + 4x \end{pmatrix}$, also $\operatorname{grad} f(0,0) = \operatorname{grad} f(-4,0) = 0$.

Aufgabe 3 *Identitäten aus der Vektoranalysis*

Im folgenden gelte als Schreibweise für das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$

$$a \bullet b := a^T b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad a, b \in \mathbb{R}^3$$

Es seien $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbare Skalarfelder und $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Beweisen Sie folgende Identitäten:

a) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \bullet \nabla f = \Delta f$

b) $\operatorname{grad}(fg) = \nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times \nabla f = 0$

d) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} V) = \nabla \bullet (\nabla \times V) = 0$

e) $\operatorname{div}(fV) = \nabla \bullet (fV) = (\nabla f) \bullet V + f\nabla \bullet V$

f) $\operatorname{rot}(fV) = \nabla \times (fV) = f\nabla \times V + (\nabla f) \times V$

Lösung: Notation und Bezeichnungen

- $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x},\ \partial_y := \frac{\partial}{\partial y},\ \partial_z := \frac{\partial}{\partial Z},\ \nabla := \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$
- $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ stetig differenzierbares Vektorfeld:

  $\operatorname{div} V = \nabla \bullet V = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3$, $\operatorname{rot} V = \nabla \times V = \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix}$
- f stetig differenzierbares Skalarfeld $\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}$

a) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{div}\left(\begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}\right) = \partial_x\partial_x f + \partial_y\partial_y f + \partial_z\partial_z f = \Delta f$, falls f 2-mal differenzierbar

b) $\partial_x(fg) = (\partial_x f)g + f(\partial_x g)$ analog für ∂_y, ∂_z
$\Rightarrow \nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g) = g(\nabla f) + f(\nabla g)$

c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{rot}\left(\begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \partial_y\partial_z f - \partial_z\partial_y f \\ \partial_z\partial_x f - \partial_x\partial_z f \\ \partial_x\partial_y - \partial_y\partial_x f \end{pmatrix} = 0$, falls f 2-mal stetig differenzierbar ist (Satz von Schwarz)

d) $\operatorname{div}(fV) = \partial_x(fv_1) + \partial_y(fv_2) + \partial_z(fv_3) \overset{\text{Kettenregel}}{=} f(\partial_x v_1) + (\partial_x f)v_1 + f(\partial_y v_2) + (\partial_y f)v_2 + f(\partial_z v_3) + (\partial_z f)v_3 = f(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3) + (\partial_x f)v_1 + (\partial_y f)v_2 + (\partial_z f)v_3 = f \cdot \operatorname{div} V + \operatorname{grad} f \bullet V = f(\nabla \bullet V) + (\nabla f) \bullet V$

e) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} V) = \partial_x(\partial_y v_3 - \partial_z v_2) + \partial_y(\partial_z v_1 - \partial_x v_3) + \partial_z(\partial_x v_2 - \partial_y v_1) \overset{\text{Schwarz}}{=} \partial_x\partial_y v_3 - \partial_x\partial_z v_2 + \partial_y\partial_z v_1 - \partial_x\partial_y v_3 + \partial_x\partial_z v_2 - \partial_y\partial_z v_1 = 0$ falls V 2-mal stetig differenzierbar ist

f) $\operatorname{rot}(fV) = \begin{pmatrix} \partial_y(fv_3) - \partial_z(fv_2) \\ \partial_z(fv_1) - \partial_x(fv_3) \\ \partial_x(fv_2) - \partial_y(fv_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\partial_y v_3) - f(\partial_z v_2) \\ f(\partial_z v_1) - f(\partial_x v_3) \\ f(\partial_x v_2) - f(\partial_y v_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\partial_y f)v_3 - (\partial_z f)v_2 \\ (\partial_z f)v_1 - (\partial_x f)v_3 \\ (\partial_x f)v_2 - (\partial_y f)v_1 \end{pmatrix} = f \cdot \operatorname{rot} V + \operatorname{grad} f \times V$

Aufgabe 4 *Wirbelfelder*

Für ganze Zahlen p seien die Vektorfelder $F_p : A \to \mathbb{R}^2$ auf der offenen Menge $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definiert durch

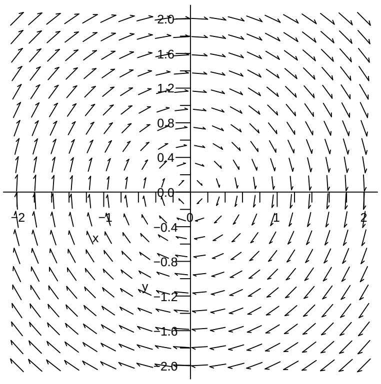
$$F_p(x,y) = \left(-\frac{y}{r^p}, \frac{x}{r^p}\right) \qquad \text{mit } r = \sqrt{x^2+y^2}$$

a) Skizzieren Sie das Feld im Spezielfall $p = 0$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe einer Kreislinie um den Nullpunkt, dass es sich um nicht konservative Felder handelt.

Lösung:

a) Es handelt sich um das in der Vorlesung skizzierte Rotationsfeld $f(x,y) = (-y, x)$



b) Man wähle für γ eine Kreislinie vom Radius $r > 0$ um den Nullpunkt mit der Parameterdarstellung $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (r\cos t, r\sin t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$. Damit erhält man das Kurvenintegral

$$\int\limits_\gamma \langle F_p(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} (-\frac{y}{r^p}\cdot x' + \frac{x}{r^p}\cdot y')\,\mathrm{d}\,t = \int\limits_0^{2\pi} \frac{-r\sin t}{r^p}\cdot(-r\sin t) + \frac{r\cos t}{r^p}\cdot r\cos t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$= r^{2-p}\cdot\int\limits_0^{2\pi}(\sin^2 t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}\,t = 2\pi r^2 - p$$

Aufgabe 5 *Gradientenfelder*

a) Sei f ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld auf $G \subseteq \mathbb{R}^n$,d.h. $f \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R}^n)$. Außerdem sei f ein Gradientenfeld. Zeigen Sie, dass dann auf G die folgende Integrabilitätsbedingung gelten muss:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

b) Ist eines der beiden Vektorfelder $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) := (y, y - x)^T, \qquad g(x, y) := (y, x - y)^T$$

ein Gradientenfeld? Wenn ja, wie lautet das zugehörige Potential?

c) Für welche Funktionen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x, y,) := (x, y, g(x, y, z))$$

ein Gradientenfeld? Bestimmen Sie das zu f gehörige Potential $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Hinweis: Betrachten Sie die Rotation des Vektorfeldes f.

Lösung:

a) f ist ein Gradientenfeld, d.h. nach Definition gibt es ein Skalarfeld $v : G \to \mathbb{R}$ mit $f = -\operatorname{grad} v$. Außerdem ist $f \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R}^n)$, somit gilt $v \in C^2(G, \mathbb{R})$. Nun gilt nach dem Satz von Schwarz:

$$f_{i,j} = -v_{i,j} = -v_{j,i} = f_{j,i}, \qquad i, j = 1 \ldots n$$

b) Zu f: Da $f_{1,2} = 1 \neq -1 = f_{2,1}$ kann f nach Aufgabenteil a) kein Gradientenfeld sein.
Zu g: Wir versuchen ein Potential v zu konstruieren. Da $v_1(x, y) = -y$ folgt, dass $v(x, y) = -xy + h_1(y)$ fü eine beliebige Funktion $h_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, die nur von y und nicht von x abhängt. Da auch $v_2(x, y) = y - x$ gelten muss, folgt, dass $v(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - xy + h_2(x)$ für eine beliebige Funktion $h_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Gleichsetzen ergibt:

$$v(x, y) = xy - \frac{1}{2}y + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

c) Da f ein Gradientenfeld sein soll, muss $\operatorname{rot} f = 0$ gelten ($\operatorname{rot}\operatorname{grad} v = 0$). Wir berechnen also die Rotation von f:

$$0 = -\operatorname{rot}\operatorname{grad} v = \operatorname{rot} f = (f_{2,3} - f_{3,2}, f_{3,1} - f_{1,3}, f_{1,2} - f_{2,1})^T = (-g_y, g_x, 0)^T$$

Dies impliziert, dass $g(x, y, z) = \alpha(z)$ für eine beliebige Funktion $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gelten die Gleichungen $v_x(x, y, z) = -x, v_y(x, y, z) = -y$ und $v_z(x, y, z) = -\alpha(z)$. Deshalb können wir das Resultat folgendermaßen schreiben (für eine beliebige Funktion $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) :

$$v(x, y, z) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \beta(z)$$

Aufgabe 6 *Satz von Stokes*

Sei ∂F der Rand der Fläche $F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - 2z = 0, z \leq 2\}, A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld definiert durch

$$A(x, y, z) := (3y, -xz, yz^2)$$

und ∂F werde im Uhrzeigersinn durchlaufen, wenn man in die Richtung der Flächennormalen blickt. Berechnen Sie das Integral von A entlang ∂F zuerst direkt und dann mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Lösung: Bei der Fläche F handelt es sich um einen Paraboloid. Der Rand ∂F von F wird durch die Kurve γ beschrieben.

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(\varphi) := 2(\cos\varphi, \sin\varphi, 1)$$

Die direkte Berechnung liefert:

$$\int_{\partial F} A \,\mathrm{d}\, x = \int_0^{2\pi} (6\sin\varphi, -4\cos\varphi, 8\sin\varphi)^T \cdot (-2\sin\varphi, 2\cos\varphi, 1)^T \,\mathrm{d}\,\varphi = -\int_0^{2\pi} 12\sin^2\varphi + 8\cos^2\varphi \,\mathrm{d}\,\varphi = -\int_0^{2\pi} 8 + 4\sin\varphi \,\mathrm{d}\,\varphi = -20\pi$$

Um nun den Satz von Stokes anzuwenden, berechnen wir die Rotation des Vektorfeldes A und finden $\operatorname{rot} A = (z^2 + x, 0, -z - 3)$. Die Fläche F hat folgende Parametrisierung:

$$f : [0, 2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ f(r, \varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \frac{1}{2}r^2)^T$$

Man berechne $f_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, r)^T$, $f_\varphi = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)^T$ und $f_r \times f_\varphi = (-r^2\cos\varphi, -r^2\sin\varphi, r)^T$. Somit folgt:

$$\int_F \operatorname{rot} A \cdot \mathrm{d}\, F = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (\tfrac{1}{4}r^4 + r\cos\varphi, 0, -\tfrac{1}{2}r^2 - 3)^T \cdot (-r^2\cos\varphi, -r^2\sin\varphi, r)^T \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\, r = -\int_0^2 \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{4}r^6\cos\varphi + r^3\cos^2\varphi + \tfrac{1}{2}r^3 + 3r \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\, r = -\int_0^2 r^3\pi + r^3\pi + 6r\pi \,\mathrm{d}\, r = -8\pi - 12\pi = -20\pi$$

Aufgabe 7 *Satz von Stokes 2*

a) Integrieren Sie die Rotation des Vektorfeldes $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, A(x, y, z) := (2y, 3x, -z^2)$, über die Oberfläche F der oberen Hälfte $z \geq 0$ der Kugel vom Radius 3.

b) Bestimmen Sie das Integral der Rotation des Vektorfeldes $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, A(x, y, z) := (x - z, x^3 + yz, -3xy^2)$, über die Oberfläche des Kegels

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0\}.$$

Lösung:

a) Wir parametrisieren der Rand ∂F der Fläche durch die Kurve

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(\varphi) := (3\cos\varphi, 3\sin\varphi, 0)^T$$

so dass
$\int\limits_F \operatorname{rot} A \cdot \mathrm{d}\, F = \int\limits_{\partial F} A \cdot \mathrm{d}\, x = \int\limits_0^{2\pi} (6\sin\varphi, 9\cos\varphi), 0)^T \cdot (-3\sin\varphi, 3\cos\varphi, 0)^T \,\mathrm{d}\,\varphi = 9\int\limits_0^{2\pi} 3\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi \,\mathrm{d}\,\varphi = 9\pi$

b) Der Rand von K kann durch die Kurve

$$k : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ k(\varphi) := 2(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

parametrisiert werden. Damit ergibt sich
$\int\limits_K \operatorname{rot} A \cdot \mathrm{d}\, K = \int\limits_{\partial K} A \,\mathrm{d}\, x = \int\limits_0^{2\pi} (2\cos\varphi, 8\cos^3\varphi, -24\sin^2\varphi\cos\varphi)^T \cdot (-2\sin\varphi, 2\cos\varphi, 0)^T \,\mathrm{d}\,\varphi = 16\int\limits_0^{2\pi} \cos^4\varphi \,\mathrm{d}\,\varphi = 12\pi$
Die Berechnung von $\cos^4\varphi$ kann entweder durch partielle Integration erfolgen:

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^4\varphi \,\mathrm{d}\,\varphi = \left[\frac{1}{4}\left(\sin\varphi\cos^3\varphi + \frac{3}{2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\right)\right]_0^{2\pi}$$

oder mit Hilfe der Formel

$$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((n-2k)\varphi) \qquad , n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 8 *Satz von Gauß*

a) Integrieren Sie das Vektorfeld $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ A(x, y, z) := (4xz, -y^2, yz)$ über die Oberfläche des Würfels $[0, 1]^3$.

b) Berechnen Sie das Integral des Vektorfeldes $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ A(x, y, z) := (x^3, y^3, z^3)$, über die Oberfläche der Kugel vom Radius $R > 0$.

Lösung:

a) Es sei W der angegebene Würfel. Da $\operatorname{div} A = 4z - y$ liefert der Satz von Gauß, dass
$\int\limits_W A \cdot \mathrm{d}\, W = \int\limits_{\partial W} \operatorname{div} A \,\mathrm{d}\, x = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (4z - y) \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, z = \frac{3}{2}$

b) Die Divergenz lautet $\operatorname{div} A = 3(x^2, y^2, z^2)^T$, also in Kugelkoordinaten $\div A = 3r^2$. Es gilt:

$$\int\limits_F \mathrm{d}\, F = \int\limits_M \operatorname{div} A \,\mathrm{d}\, s = \int\limits_0^R\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} r^2 \sin\vartheta 3r^2 \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\,\vartheta \,\mathrm{d}\, r = \frac{12}{5}\pi R^5$$

Aufgabe 9 *Fourier-Reihe*

Es sei $0 < a < 2\pi$ und $f(x) = 1$, falls $0 < x < a$ gilt, sowie $f(x) = 0$, falls $a < x < 2\pi$ gilt. Die Werte $f(0)$ und $f(a)$ können beliebig sein. Sodann sei mittels $f(x + 2\pi) = f(x)$ die Funktion f auf $\mathbb{R}$ periodisch fortgesetzt. Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten von f.

Lösung: Fourier-Koeffizienten für $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{a} \mathrm{d}\,x = \frac{a}{2\pi}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{a} e^{-inx}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{in} e^{-inx} \right]_0^a = \frac{1 - e^{-ina}}{2\pi i n}$$

Aufgabe 10 *Fourier-Reihe*

Berechnen Sie die Fourier-Reihe der Funktionen

a) $f(x) = |\sin x|$

b) $g(x) = x \qquad$ für $0 \leq x < 2\pi$

Lösung:

a) Die Fourier-Koeffizienten der Funktion f sind

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-inx}\,\mathrm{d}\,x$$

$c_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin x \cdot e^{-inx}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_0^{\pi} ((e^{ix} - e^{-ix})e^{-inx}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{\pi} e^{-ix(n-1)} - e^{-ix(n+1)}\,\mathrm{d}\,x =$
$\frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{-i(n-1)} e^{-ix(n-1)} - \frac{1}{-i(n+1)} e^{-ix(n+1)} \right]_0^{\pi}$
Für ungerades n ist dieser Term gleich null und für gerades n gilt:
$c_n = \left(-\frac{2}{n-1} + \frac{2}{n+1} \right) = -\frac{1}{\pi} \frac{2}{n^2-1}$
Die Fourier-Reihe konvergiert gleichmäßig gegen f, da die Funktion stetig und stückweise stetig differenzierbar ist. Mit $n = 2k$ gilt dann:

$$|sinx| = -\frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2kix}}{k^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\pi} \left(2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{k^2 \frac{1}{4}} \right)$$

b) Für den Fourier-Koeffizienten c_0 von f erhält man

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} x\,\mathrm{d}\,xt = \pi$$

Zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten c_n mit $n \neq 0$ verwendet man partielle Integration:

$$2\pi c_n = \int\limits_0^{2\pi} x e^{-inx}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{-in} e^{-inx} x \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{in} \int\limits_0^{2\pi} e^{-inx}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{2\pi}{in}$$

Somit lautet die Fourier-Reihe von f

$$\sum_{n=-infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{in} = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$