Repetitorium Analysis II für Physiker

Aufgabe 1 *Skalarfelder*

Welche der folgenden Aussagen für die Niveaulinien der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = e^{3x+5y}$$

ist richtig?
□ Die Niveaulinien sind konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt $M(3,5)$.
□ Die Niveaulinien sind konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt $M(-3,-5)$.
□ Die Niveaulinien sind Parabeln mit dem Scheitelpunkt $S(3,5)$.
□ Die Niveaulinien sind Parabeln mit dem Scheitelpunkt $S(-3,-5)$.
□ Die Niveaulinien sind parallele Geraden mit der Steigung $-\frac{5}{3}$.
□ Die Niveaulinien sind parallele Geraden mit der Steigung $-\frac{3}{5}$.

Aufgabe 2 *Skalarfelder*

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^2y + 4xy$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?
□ $\operatorname{grad} f(1,1) = 0$
□ $\operatorname{grad} f(-4,0) = 0$
□ $\operatorname{grad} f(0,-4) = 0$
□ $\operatorname{grad} f(0,0) = 0$
□ $\operatorname{grad} f(-2,0) = 0$
□ $\operatorname{grad} f(0,-2) = 0$

Aufgabe 3 *Identitäten aus der Vektoranalysis*

Im folgenden gelte als Schreibweise für das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$

$$a \bullet b := a^T b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad a,b \in \mathbb{R}^3$$

Es seien $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbare Skalarfelder und $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Beweisen Sie folgende Identitäten:

a) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \bullet \nabla f = \Delta f$

b) $\operatorname{grad}(fg) = \nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times \nabla f = 0$

d) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} V) = \nabla \bullet (\nabla \times V) = 0$

e) $\operatorname{div}(fV) = \nabla \bullet (fV) = (\nabla f) \bullet V + f\nabla \bullet V$

f) $\operatorname{rot}(fV) = \nabla \times (fV) = f\nabla \times V + (\nabla f) \times V$

Aufgabe 4 *Wirbelfelder*

Für ganze Zahlen p seien die Vektorfelder $F_p : A \to \mathbb{R}^2$ auf der offenen Menge $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ definiert durch

$$F_p(x,y) = \left(-\frac{y}{r^p}, \frac{x}{r^p}\right) \qquad \text{mit } r = \sqrt{x^2+y^2}$$

a) Skizzieren Sie das Feld im Spezielfall $p = 0$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe einer Kreislinie um den Nullpunkt, dass es sich um nicht konservative Felder handelt.

Aufgabe 5 *Gradientenfelder*

a) Sei f ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld auf $G \subseteq \mathbb{R}^n$,d.h. $f \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R}^n)$. Außerdem sei f ein Gradientenfeld. Zeigen Sie, dass dann auf G die folgende Integrabilitätsbedingung gelten muss:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \qquad i,j = 1,\ldots,n$$

b) Ist eines der beiden Vektorfelder $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) := (y, y-x)^T, \qquad g(x,y) := (y, x-y)^T$$

ein Gradientenfeld? Wenn ja, wie lautet das zugehörige Potential?

c) Für welche Funktionen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,) := (x, y, g(x,y,z))$$

ein Gradientenfeld? Bestimmen Sie das zu f gehörige Potential $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Hinweis: Betrachten Sie die Rotation des Vektorfeldes f.

Aufgabe 6 *Satz von Stokes*

Sei ∂F der Rand der Fläche $F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2-2z = 0, z \leq 2\}, A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld definiert durch

$$A(x,y,z) := (3y, -xz, yz^2)$$

und ∂F werde im Uhrzeigersinn durchlaufen, wenn man in die Richtung der Flächennormalen blickt. Berechnen Sie das Integral von A entlang ∂F zuerst direkt und dann mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Aufgabe 7 *Satz von Stokes 2*

a) Integrieren Sie die Rotation des Vektorfeldes $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, A(x,y,z) := (2y, 3x, -z^2)$, über die Oberfläche F der oberen Hälfte $z \geq 0$ der Kugel vom Radius 3.

b) Bestimmen Sie das Integral der Rotation des Vektorfeldes $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, A(x,y,z) := (x - z, x^3 + yz, -3xy^2)$, über die Oberfläche des Kegels

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}, z \geq 0\}.$$

Aufgabe 8 *Satz von Gauß*

a) Integrieren Sie das Vektorfeld $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ A(x,y,z) := (4xz, -y^2, yz)$ über die Oberfläche des Würfels $[0,1]^3$.

b) Berechnen Sie das Integral des Vektorfeldes $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ A(x,y,z) := (x^3, y^3, z^3)$, über die Oberfläche der Kugel vom Radius $R > 0$.

Aufgabe 9 *Fourier-Reihe*

Es sei $0 < a < 2\pi$ und $f(x) = 1$, falls $0 < x < a$ gilt, sowie $f(x) = 0$, falls $a < x < 2\pi$ gilt. Die Werte $f(0)$ und $f(a)$ können beliebig sein. Sodann sei mittels $f(x+2\pi) = f(x)$ die Funktion f auf $\mathbb{R}$ periodisch fortgesetzt. Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten von f.

Aufgabe 10 *Fourier-Reihe*

Berechnen Sie die Fourier-Reihe der Funktionen

a) $f(x) = |\sin x|$

b) $g(x) = x \qquad \text{für } 0 \leq x < 2\pi$